

C. — SULLE MISURE RICAVATE DALLE CARTE GEOGRAFICHE.

Il professore Fiorini, ben noto per i suoi importanti lavori sulle proiezioni geografiche, ha pubblicato di recente una Memoria, che ha uno speciale valore per i nostri studi (1). È una accurata indagine sulle misure lineari, superficiali ed angolari offerte dalle carte geografiche; nella quale l'Autore cerca quale sia la migliore via da seguire per trovare la lunghezza di una linea segnata sulla carta, per trovare l'area compresa in un dato contorno, per dedurre l'angolo obbiettivo di due linee note per mezzo della loro rappresentazione.

Crediamo utile di riferire qui con qualche ampiezza, ed in parte colle stesse parole dell'A., il contenuto di questa monografia.

Nell'introduzione sono stabilite le nozioni generali ed anzitutto sono dati alcuni teoremi e riferite alcune formole intorno ai moduli lineari, superficiali ed angolari, la cui importanza è ben grande per la determinazione delle distanze, delle aree e degli angoli (2). Ricorderemo qui le definizioni e le proposizioni principali.

Una carta geografica altro non è che una rappresentazione dello sferoide terrestre sopra un piano, delineata ad una determinata scala.

È noto che, qualunque sia la legge della proiezione, avvengono sempre ed immancabilmente alterazioni lineari, fatta eccezione per alcuni punti

(1) *Misure lineari, superficiali ed angolari offerte dalle carte geografiche*. Firenze, 1886, estr. dagli *Atti del Collegio degli Ingegneri di Firenze*, 1 sem., 1886.

(2) L'Autore, per molti di questi teoremi e formole, rimanda a: FIORINI. *Le proiezioni delle carte geografiche*, Bologna, 1881, Cap. I, Art. I e III; TISSOT. *Mémoire sur la représentation des surfaces des cartes géographiques*, Paris, 1861, Cap. I; HERTZ. *Lehrbuch der Landkarten-Projectionen*, Lipsia, 1885, Cap. IV.

particolari o per certe direzioni; in guisa che gli elementi lineari obbiettivi soggiacciono a reali allungamenti od accorciamenti. Si dà il nome di *modulo lineare* al rapporto, secondo il quale le distanze elementari obbiettive sono riprodotte nella rappresentazione; ond'è che tali distanze sono immutate, dilatate o costipate secondo che il modulo è uguale, superiore od inferiore all'unità. Il suo valore varia non solo da punto a punto, ma anche col cambiare della direzione dell'elemento lineare.

Fra tutti i valori del modulo, che competono agli elementi lineari uscenti da uno stesso punto secondo le varie direzioni, ve ne sono due, detti principali, l'uno massimo, l'altro minimo, rispondenti a due direzioni fra loro perpendicolari tanto sulla superficie obbiettiva, quanto nella rappresentazione. Queste direzioni, dette pure principali, sono le uniche che si mantengano ortogonali obbiettivamente e subbiettivamente.

La quale ultima proprietà fa subito conoscere, in certi casi, quali sieno le direzioni principali. Così diciamo che queste, nelle proiezioni cilindriche, nelle coniche e nelle polari, coincidono coi meridiani e paralleli, perchè tali linee, incontrantisi ad angolo retto sullo sferoide, o sulla sfera, seguitano sulla carta ad essere ortogonali. Così, considerando la prospettiva della sfera, diciamo che le direzioni principali nelle prospettive polari coincidono coi meridiani e paralleli e, nelle prospettive meridiane ed orizzontali, cogli azimuti ed almicantrati riferentisi al polo della prospettiva, ossia al luogo sul cui orizzonte questa si pratica.

Da un teorema di non comune importanza e fecondo di molti corollari l'Autore altro ne deduce, ed è che « la media aritmetica dei quadrati dei moduli lineari rispondenti alle infinite direzioni che si possono tirare per un dato punto, compiendo un giro d'orizzonte, uguaglia la semisomma dei quadrati dei moduli principali. »

Ed ecco quanto leggesi intorno alle scale:

L'elemento lineare obbiettivo è amplificato sulla carta: 1° nel rapporto m , che è il modulo lineare dipendente dalla « legge della rappresentazione » (cioè dalla qualità della proiezione usata) e variabile da punto a punto, da direzione a direzione; 2° nel rapporto $1/q$, che è la scala di delineazione della carta. E però il vero rapporto d'amplificazione dell'elemento obbiettivo vale m/q ed è ad un tempo la scala, che serve a valutare le lunghezze. Scala generale dicesi la $1/q$, scala speciale la m/q .

La natura cedevole ed igroscopica della carta è causa di alterazioni, che si manifestano nelle carte originali ed anche più nelle riproduzioni per via d'incisione: in queste pel restringimento sofferto dai fogli prosciugantisi dopo la tiratura, in quelle perchè il loro distacco dalle tavolette su cui furono applicate prima della delineazione produce, generalmente, una costi-

pazione. Altre alterazioni, pel variare dello stato igrometrico dell'atmosfera, continuamente avvengono da giorno a giorno, da mane a sera. In tempo secco e caldo la carta si condensa, in tempo umido si dilata; il condensamento nell'estate, a mezzo della giornata, è il più delle volte maggiore che nella mattina e nella sera. Ed è da ritenere che simili alterazioni lineari, se la carta si compone di più fogli, variino da foglio a foglio, e che per un dato foglio l'alterazione non sia nel senso della lunghezza la stessa che nel verso della larghezza.

Adunque la scala speciale m/q è variabile, perchè variabili sono il modulo m e la scala generale $1/q$.

Quanto alla ricerca del modulo m , si rimanda il lettore alla citata opera del Fiorini sulle proiezioni. Resta da parlare della scala generale $1/q$, la quale non può dirsi coincidente colla scala segnata sulla carta; questa perciò deve essere corretta dagli errori provenienti dalle accennate alterazioni. Il suo vero valore si rinviene, quando sia tracciata sulla carta una linea di nota lunghezza obbiettiva, ad esempio, un arco di meridiano o di parallelo. Invero si consideri un arco di parallelo compreso fra due noti meridiani, ovvero un arco di meridiano contenuto da noti paralleli, e siane α la lunghezza obbiettiva, A la sua rappresentazione piana nel dato sistema di proiezione, a la lunghezza sulla carta. Diviso l'arco α in parti sufficientemente piccole, tali cioè che il modulo lineare m si possa ritenere costante per ciascuna di esse, detta B la rappresentazione di ciascuna parte b , della quale siasi calcolato il modulo m , si ha $B=mb$ e quindi

$$A = \Sigma B = \Sigma m b,$$

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{A} = \frac{\alpha}{\Sigma m b}$$

Se m è costante in tutta la lunghezza dell'arco α , è

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{m \Sigma b} = \frac{\alpha}{m a},$$

che, nel caso di $m=1$, diviene

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{a}.$$

E notisi che vi sono certe proiezioni, in cui ai meridiani od ai paralleli spetta un modulo costante, che può anche essere l'unità, e che in altre proiezioni, se ciò non avviene per tutti i meridiani o per tutti i paralleli, accade per qualcuno dei loro archi.

Nel caso generale si calcola il valore di ciascuna parte obbiettiva b ; nel caso di m costante, basta calcolare l'arco obbiettivo α .

Ricorrendo, per un dato foglio, ad archi di diversi meridiani, si troveranno certi valori per $1/q$, che generalmente di pochissimo differiranno

fra loro e di cui si prenderà la media. Lo stesso dicasi in riguardo ai paralleli. Se non è trascurabile il divario delle due medie, torna utile tenerle distinte; si avrà così una scala generale $1/q$ nel senso dei meridiani, ed altra nel senso dei paralleli. La quale cosa può essere vantaggiosa, quando queste linee di latitudine e longitudine siano all'incirca disposte secondo la lunghezza e la larghezza del foglio.

L'autore, venendo alle aree, ricorda che queste, eccettuato il caso delle proiezioni che hanno la proprietà di mantenerle immutate, sono alterate nella rappresentazione, anche all'infuori degli elementi superficiali spettanti a qualche punto particolare od a certe direzioni; che il modulo superficiale, ossia il rapporto amplificativo delle aree elementari, varia da punto a punto ed uguaglia il prodotto dei moduli lineari principali; che le aree soggiacciono a dilatazioni o restringimenti secondo che il modulo è maggiore o minore dell'unità. Ed intorno alle scale per le aree, detto μ il modulo superficiale, ha:

L'area di ciascun elemento superficiale obbiettivo è amplificata nella carta: 1° nel rapporto μ^2 ; 2° nel rapporto $1/q^2$. Adunque il vero rapporto amplificativo dello stesso elemento è μ^2/q^2 , che realmente è la scala per la valutazione delle aree e che è variabile per la variabilità del modulo μ^2 e della scala $1/q$ delle lunghezze. Scala generale delle aree dicesi la $1/q^2$, scala speciale la μ^2/q^2 .

Infine l'autore, trattando degli angoli, ha:

Gli angoli obbiettivi sono in generale soggetti ad alterarsi nella rappresentazione. Fa eccezione il caso delle proiezioni che hanno la proprietà di mantenerli inalterati. E sono da eccettuarsi gli angoli che hanno il vertice in certi punti particolari, od anche in certe linee. Ed è pure nota la esistenza, per ogni punto della superficie obbiettiva, di una infinità di coppie di direzioni, che nella rappresentazione conservano inalterato il loro angolo (1).

E soggiungesi che la misura delle alterazioni angolari è data dal modulo angolare, ossia dal rapporto dei due moduli principali, il quale si ottiene dividendo il massimo per il minimo; che, essendo le alterazioni angolari causa od effetto di deformazioni nelle configurazioni elementari, il detto rapporto misura altresì tali deformazioni; che il modulo angolare varia da punto a punto; che ogni qualvolta esso uguaglia l'unità, sono nulle le alterazioni angolari e nulla è la deformazione; che, in altri termini, havvi conservazione degli angoli e delle forme delle configurazioni elementari.

Gli angoli obbiettivi essendo nella rappresentazione più o meno sformati, ecco ciò che leggesi sopra questo argomento:

Per un dato punto della superficie obbiettiva, una data direzione sog-

(1) Vedi *Le proiezioni delle carte geografiche*, Cap. I, § 10.

giace nella rappresentazione a certe deviazioni dalle direzioni principali. Due sono le direzioni che ne sopportano la massima deviazione, il cui valore diciamo ε . Esse formano l'angolo sottoposto all'alterazione massima, il quale nella rappresentazione si cambia nel suo supplemento e diminuisce o cresce del doppio della detta deviazione ε , secondo che lo si considera diviso per metà dalla direzione principale rispondente al massimo, ovvero al minimo modulo lineare. Adunque l'alterazione dell'angolo più sformato vale 2ε . E si hanno per ε due valori fra loro uguali, l'uno positivo, l'altro negativo, rispondenti appunto ai due angoli supplementari soggetti alla massima deformazione. Sono note e semplici le formole vevoli alla ricerca del semierrore ε dell'angolo più sformato e delle inclinazioni dei suoi lati sulle direzioni principali e l'altra per la quale, dato l'angolo obbiettivo di una direzione colle direzioni principali, se ne trova il subbiettivo, e reciprocamente. A giudicare delle deformazioni angolari in un dato punto giova moltissimo la conoscenza della alterazione dell'angolo più sformato (1).

Dopo ciò l'A. discorre nel seguente modo dei vantaggi che offrono certe proiezioni:

Se le distanze sono soggette ad alterarsi in qualsiasi proiezione piana dello sferoide terrestre, nè è possibile una proiezione in cui le lunghezze siano in rapporto costante colle lunghezze obbiettive (2), non è così delle aree e degli angoli; conciossiachè si abbiano proiezioni, che hanno le aree della rappresentazione in rapporto costante colle aree rappresentate; altre che hanno la proprietà di conservare le aree obbiettive, ed altre in cui sono conservati gli angoli. Quantitative diconsi le prime, equivalenti le seconde, isogoniche le ultime (3). Ma se queste conservano gli angoli, soggiacciono per altra parte ad alterazioni superficiali, e se le seconde conservano le aree e le prime le mantengono in rapporto costante colle obbiettive, ambe sformano gli angoli.

Nelle proiezioni quantitative, essendo costante il modulo superficiale μ^2 , la scala per valutare le aree, pari a μ^2/q^2 , è costante quando sia costante q . Nelle equivalenti, il modulo superficiale uguaglia l'unità; nè è più il caso di parlare di scala generale e di scala speciale; l'una si confonde coll'altra, e vale $1/q^2$. Ed ecco alcune proprietà delle proiezioni quantitative ed equivalenti:

Il prodotto dei due moduli lineari principali è costante ed uguale a μ^2 , ovvero all'unità, secondo che trattasi della proiezione quantitativa od equivalente.

(1) Op. cit., Cap. I, §§ 5 e 8.

(2) Op. cit., Cap. I, § 27.

(3) Delle proiezioni quantitative si tratta, in modo generale, nell'op. cit., Cap. I, §§ 13 e 28, delle equivalenti, dette anche autaliche, ai §§ 14 e 29, delle isogoniche, dette pure ortomorfe, ovvero autogonali, oppure conformi, ai §§ 15 e 30.

Per ogni punto esistono due direzioni di modulo lineare uguale alla unità, ovvero a μ , secondo che la proiezione è equivalente o quantitativa, le quali coincidono colle direzioni di massima deviazione dalle direzioni principali, ossia coi lati dell'angolo più sformato. E più brevemente, nella proiezione equivalente per ogni punto passano due curve isoperimetre, nella quantitativa due linee, i cui archi sono amplificati nel rapporto costante μ .

Le proiezioni quantitative ed equivalenti hanno grande importanza nella cartografia. Dal confronto delle regioni delineate sulla carta si arguisce il rapporto delle loro estensioni superficiali. Ai governanti, agli amministratori degli Stati, delle Provincie, ai cultori della statistica, tali carte tornano utilissime. Se ne avvantaggiano certi rami della geografia, ed in particolare la geografia fisica. I naturalisti vi studiano meglio la distribuzione delle piante e degli animali, i geologi quella de' continenti e de' mari, i mineralogi quella de' giacimenti minerali.

Quando la proiezione è isogonica, il modulo lineare m varia bensì da punto a punto, ma non varia col variare della direzione dell'elemento lineare; il modulo superficiale è uguale al quadrato del modulo lineare; il modulo angolare uguaglia l'unità; la scala speciale, che è m/q per le lunghezze, vale m^2/q^2 per le aree.

Dalla proprietà che hanno le proiezioni isogoniche di conservare gli angoli segue l'altra che la rappresentazione è, nelle parti infinitesime, simile alla figura rappresentata. Venendo perciò conservate sulla carta le conformazioni delle singole e minime parti della plaga terrestre presa a rappresentare, ritenendo, cioè, ciascuna terra in particolare la sua figura, ne traggono grande giovamento le tavole geografiche, delle quali non ultimo scopo è quello di offrire all'occhio dell'osservatore la vera configurazione dei terreni. Ed ancora: non soffrono mutamento, nella rappresentazione, gli angoli che i geodeti misurano per determinare le posizioni dei luoghi terrestri, si serbano inalterati gli angoli azimutali delle varie linee rappresentate, le quali vengono perciò a conservare la loro posizione rispetto ai punti cardinali, si mantengono immutati i rombi delle rose dei venti, sono conservate le forme elementari delle più importanti linee segnate sulla carta, come i perimetri di confine ed i littorali; in guisa che i seni ed i promontori di questi, le sporgenze e le rientrature di quelli, le direzioni delle varie parti delle dette linee rispetto ai punti cardinali appariscono sulla carta quali realmente sono sulla superficie terrestre.

Dopo queste considerazioni l'A. prende a trattare della misura delle distanze nel seguente modo:

Qui non ci occupiamo della minima distanza che corre tra due luoghi terrestri. La geodesia insegna a trovarla, quando sieno note le latitudini e

le longitudini dei due luoghi. D'altra parte tale questione non ha, praticamente, grande importanza. È ben difficile che si voglia conoscere la minima distanza tra due dati punti, fra Parigi e Pietroburgo, tra Roma e Berlino, tra Napoli e Venezia, tra Firenze e Bologna. Ciò che il più delle volte si ricerca è la distanza di due luoghi seguendo una certa strada, la quale è più o meno sinuosa, nè mai n'è il minimo intervallo. E anche quando si discorre di distanze marittime, dei viaggi percorsi dalle navi ed espressi in miglia nautiche, non si tratta di minima distanza da luogo a luogo, conciossiachè le navi non percorrano archi di circolo massimo, che segnano appunto, sulla sfera terrestre, le più brevi distanze, ma descrivano invece archi lossodromici. De' quali la lunghezza si misura direttamente col solcometro, o si rinviene coll'ajuto delle formole della trigonometria lossodromica ed anche per mezzo delle carte nautiche (1). Vero è che ora si tenta la navigazione ortodromica, quella cioè fatta per archi di circolo massimo. In tale caso la ricerca della distanza di due luoghi marittimi non offre difficoltà; basta ricorrere alle ordinarie formole della geodesia.

Il problema, dunque, da risolvere è di dedurre dalla carta geografica la lunghezza di una certa linea poligonale o curva, la quale segna ora la strada congiungente due luoghi, ora un corso d'acqua, ora un litorale, ora il confine di una regione, ora la frontiera dello Stato, ed ora alcun che di simile. Scomposta la linea in tante parti od elementi tali, che per ciascuno di questi si possa ritenere costante la scala speciale m/q , detta δ la lunghezza dell'elemento sulla carta, d la lunghezza obbiettiva, si ha

$$d = \frac{q}{m} \delta,$$

e quindi

$$\Sigma d = \Sigma \frac{q}{m} \delta,$$

dove $\Sigma q/m \delta$ esprime la somma dei valori di $q/m \delta$ riguardanti ciascun elemento della linea segnata sulla carta; e Σd la somma dei corrispondenti elementi lineari obbiettivi, ossia la richiesta lunghezza della linea tracciata sullo sferoide.

Il variare del modulo lineare m rispondentemente al dato sistema di proiezione e della scala generale $1/q$ in causa della igroscopicità della carta fissa i limiti della grandezza degli elementi δ .

Se la scala speciale, per il considerato tratto della nominata linea, è costante, o tale si può ritenere nei limiti della voluta approssimazione, risulta

$$\Sigma d = \frac{q}{m} \Sigma \delta.$$

(1) Op. cit., Cap. I, § 21 e Cap. IV, § 30.

Ciò è dire, che il prodotto della lunghezza della linea tracciata sulla carta per l'inverso della scala speciale dà la lunghezza della linea obbiettiva. Le più delle volte tale formola è applicabile od all'intera linea, quando non sia troppo lunga, od a' suoi vari tronchi che conviene assumere con discreta lunghezza, ed in generale ad una linea contenuta in un quadrangolo della rete de' meridiani e paralleli tracciati sulla carta.

È questo ultimo caso che l'autore prende a trattare in modo particolare.

Detto del modo di calcolare con apposite formole un arco di parallelo ad una data latitudine e limitato da due dati meridiani ed un arco di meridiano compreso fra due dati paralleli, l'autore così prosegue:

Se i meridiani od i paralleli tracciati sulla carta geografica sono sufficientemente prossimi, e la scala non è troppo piccola, accade bene spesso che in ciascheduno dei trapezi o quadrangoli, che sono come le maglie della rete formata da quelle linee, il modulo lineare vari ben poco non solo da direzione a direzione, ma anche da punto a punto. Allora il suo quadrato si può ritenere costante ed uguale alla media aritmetica dei quadrati dei moduli rispondenti alle infinite direzioni tirate pel punto centrale del quadrangolo, la quale uguaglia la semisomma dei quadrati dei moduli principali. Lo stesso avviene per la scala generale $1/q$, la quale si può ritenere costante nell'ambito di uno stesso quadrangolo. E si sarà ben prossimi al vero assumendola uguale alla media aritmetica delle scale proprie ai quattro lati del trapezio od anche alla media delle due scale competenti agli archi di meridiano e parallelo tirati pel punto centrale e prolungati sino ai detti lati. Con che viene ad essere costante in ciaschedun trapezio la scala speciale m/q . E però la lunghezza obbiettiva b di una data linea in un dato quadrangolo, la cui lunghezza misurata sulla carta sia β , viene ad essere

$$b = \frac{q}{m} \beta$$

La lunghezza β è rinvenibile col compasso, bastando scomporre la linea supposta curva in piccole parti, da ritenersi rettilinee, e lo è pure col così detto curvimetro; strumento atto a trovare la lunghezza di una linea tracciata sulla carta, il quale altro non è che un contatore del numero dei giri di una rotella percorrente la nominata linea, su cui successivamente se ne sviluppa la circonferenza. Detto n il numero dei giri fatti dalla rotella nel percorrere sulla carta la linea β , e K l'unità curvimetrica, è

$$\beta = K n$$

e quindi

$$b = \frac{q}{m} K n,$$

che, fatto

$$G = \frac{Kq}{m},$$

riducesi a

$$b = Gn.$$

L'unità curvimetrica generalmente è espressa in millimetri, e però in millimetri lo sarà pure la distanza b , che dovrassi poi ridurre in metri od in chilometri.

Il curvimetro abbrevia certamente l'operazione fatta col compasso; ma la medesima non cessa di essere lunga, laboriosa e piena di pericoli, dovendosi determinare l'unità curvimetrica, e trovare per ogni quadrangolo la media scala generale $1/q$ ed il medio modulo m , il cui quadrato si ritiene pari alla semisomma dei quadrati dei moduli principali nel punto centrale. A ciò si aggiunga che è causa di errori la rugosità della carta. Tuttavia l'uso di tale strumento può rendersi di gran lunga più proficuo. In vero si faccia percorrere dalla rotella del curvimetro una certa linea di lunghezza obbiettiva nota, la quale si contenga nel trapezio comprendente la b , e sia N il numero dei giri fatti dalla rotella in tale percorso, ed s la lunghezza obbiettiva della detta linea, sarà

$$s = GN.$$

Questa e la precedente equazione danno

$$b = \frac{\pi}{N} s$$

È bene che la s sia un arco di meridiano o di parallelo tale, che si sappia calcolare esattamente, od anche un insieme di certi loro archi diversamente collocati. Assumendo per s il perimetro del nominato trapezio, può dirsi che la lunghezza b di una linea contenuta in un dato quadrangolo si ottiene moltiplicando il perimetro s di questo, calcolato mediante gli elementi dello sferoide terrestre, per il rapporto delle unità curvimetriche somministrate dalle misure delle linee che nella carta rispondono alla linea b ed al perimetro s (1).

Così non fa d'uopo determinare l'unità curvimetrica, ossia il coefficiente K ; basta conoscere il numero di tali unità; si fa a meno di ricercare i valori del modulo m e della scala $1/q$; restano eliminate le influenze delle alterazioni lineari dovute al sistema di proiezione e di quelle provenienti dalla maggiore o minore condensazione della carta, e vengono elisi

(1) Può anche essere utile prendere per s la somma dei due archi di meridiano e di parallelo condotti pel punto centrale del quadrangolo fino all'incontro del perimetro, avvertendo che allora N è la somma dei giri indicati dalla rotella del curvimetro nel percorrere i due nominati archi. Dei quali è facile la delineazione in certe proiezioni, ad esempio nelle cilindriche e nelle coniche, e particolarmente nei fogli della carta d'Italia alla scala di 1:100,000.

gli errori prodotti dalla deficienza della sua levigatezza. Ma ad annullare questi errori è indispensabile che le operazioni curvimetriche necessarie a determinare n e N si succedano per ogni quadrangolo senza frapporre lungo intervallo di tempo, o meglio, immediatamente.

Dovendosi trovare la lunghezza di una certa linea, ad esempio, di una frontiera, basta determinare le lunghezze delle varie parti della linea contenute in ciascun quadrangolo attraversato e farne la somma. Laonde tornano più opportune le carte in cui sia fitta la rete dei meridiani e paralleli, come pure sono preferibili le carte a grande scala.

L'accennato metodo per trovare le distanze col curvimetro adoperato come semplice contatore e senza preoccuparsi del valore dell'unità curvimetrica, può anche valere per le mappe non fornite di meridiani e paralleli, purchè portino segnati i punti trigonometrici che hanno servito di base al rilevamento topografico. A trovare la lunghezza di una linea b giova ancora l'ultima riferita formola, intendendo che s sia la distanza di due vertici trigonometrici segnati sulla mappa; distanza che è nota, quando questi due punti siano gli estremi di un lato della rete trigonometrica; oppure che si può calcolare, quando si conoscano gli elementi che determinarono la loro posizione, quando, ad esempio, siano note le loro coordinate rettangolari. E però diciamo, che la lunghezza di una linea b uguaglia il prodotto della distanza s di due punti trigonometrici segnati sulla mappa, per il rapporto delle unità curvimetriche somministrate dalle misure delle linee b e s figurate sulla mappa.

Gli attuali curvimetri non hanno certamente raggiunta ancora una grande perfezione. È da fare voti che qualche rinomato costruttore ne porti la fabbricazione all'altezza richiesta dalla bontà delle carte geografiche e topografiche.

Esaurito l'argomento della misura delle distanze, l'autore si occupa della questione delle aree, ricercando come dalla carta geografica si deduca l'area obbiettiva di una data figura, investigando il migliore metodo per trovare l'area di una plaga terrestre grande o piccola, della quale è delineato il perimetro sulla carta.

Discorso primieramente delle varie formole, che valgono a calcolare l'area di un quadrangolo dello sferoide terrestre limitato da due dati meridiani e da due dati paralleli, egli prosegue nel modo seguente:

Siccome la rete de' meridiani e paralleli tracciata sulla carta geografica è formata di maglie trapezoidali rispondenti a determinati quadrangoli sferoidici della superficie terrestre, così l'area di una certa plaga, il cui perimetro attraversa, sulla carta, le maglie della rete, consta generalmente

di un certo numero di quadrangoli sferoidici e ~~di~~ un certo numero di frazioni di altri quadrangoli, le quali sono le porzioni obbiettive delle maglie intersecate dalla linea di confine della plaga e che di questa formano parte integrante.

Sono, dunque, due le specie di aree da rinvenirsi, le aree dei quadrangoli e le aree delle frazioni di quadrangolo. Le prime si trovano in modo sicuro ricorrendo alle opportune e note formole, delle quali il calcolo non è nè lungo nè difficile, a cagione delle non poche quantità costanti che in esse sono. Che anzi, ammessa l'equidistanza nei gradi dei paralleli e dei meridiani della rete, non havvi altro di variabile da quadrangolo a quadrangolo che la semisomma delle latitudini estreme; e questa semisomma è pure costante per tutti quei quadrangoli, che, essendo contigui, giacciono sopra una stessa zona dello sferoide. E però basterà calcolare per ciascuna zona l'area di un quadrangolo, salvo a ripeterla il necessario numero di volte.

In quale modo, poi, si otterrà dalla carta geografica l'area obbiettiva c di una frazione di un dato quadrangolo? Quantunque la scala $1/q^2$ ed il modulo μ^2 sieno variabili, tuttavia possono ritenersi costanti nell'ambito di uno stesso quadrangolo, mercè l'avvedimento indicato più sopra in riguardo alla scala $1/q$ e quando si faccia μ^2 uguale alla media di un certo numero di moduli superficiali rispondenti a vari punti del quadrangolo, ed anche semplicemente, al modulo superficiale competente al punto centrale o ad altro punto che si reputi più conveniente. Con che viene ad essere costante, per quella certa frazione di quadrangolo, la scala speciale superficiale μ^2/q^2 , e, detta γ l'area della figura delineata e misurata sulla carta e rispondente all'area obbiettiva c , si ha

$$c = \frac{q^2}{\mu^2} \gamma.$$

Vari sono i metodi per trovare in sulla carta l'area γ . Ma non v'ha dubbio che meglio è ricorrere al planimetro polare. Se n è il numero dei giri segnati dalla rotella di tale strumento, mentre il calcatojo percorre il perimetro della figura, e h un certo coefficiente da determinarsi sperinentalmente, si ha (1)

$$\gamma = h n,$$

e quindi

$$c = \frac{q^2}{\mu^2} h n,$$

che, fatto

$$H = h \frac{q^2}{\mu^2},$$

(1) S'intende che il polo del planimetro sia sempre fuori della superficie da misurare.

riducesi a

$$c = H n.$$

Se l'unità planimetrica, la quale altro non è che il coefficiente λ , è espressa in millimetri quadrati, lo sarà pure la c , che generalmente è conveniente ridurre in chilometri quadrati, tale essendo l'unità in cui calcolansi le aree dei quadrangoli della rete.

Sull'esattezza delle aree dei quadrangoli sferoidici non sorgono dubbj, all'infuori di quelli provenienti dalla scelta degli elementi dello sferoide terrestre. Non è così per le aree delle frazioni di quadrangolo, su cui hanno influenza le alterazioni superficiali inerenti al sistema di proiezione, per cui il modulo μ^2 , variabile da elemento ad elemento, soltanto per approssimazione si ritiene costante per ogni singola frazione, come pure le alterazioni originate dall'igroscopicità della carta, che hanno per effetto di rendere variabile la scala lineare $1/q$ da foglio a foglio, da parte a parte dello stesso foglio e secondo che la direzione della linea è nel senso della lunghezza o della larghezza del foglio, per cui anche del rapporto $1/q^2$, soltanto in via d'approssimazione, si ammette la costanza. E la rugosità della carta non è forse una sorgente di errori nella determinazione del numero n dei giri della rotella del planimetro? E chi non vede la necessità di procedere colla massima cura possibile nella determinazione della unità planimetrica λ ?

Adunque per valutare la superficie di una data regione, bisogna far sì che massima sia la parte da ottenersi col calcolo, minima quella da trovarsi graficamente; e che quindi le frazioni c , rappresentate nella carta dalle figure γ sieno le più piccole possibili. Le quali cose tanto meglio si raggiungono, quanto più è fitta, o tale si rende, la rete de' meridiani e paralleli. Dal che conchiudesi altresì la preferenza da darsi alle carte a grande scala (1).

Lunghe, laboriose e piene di pericoli sono le operazioni planimetriche. Nè migliori risultati sono attendibili adottando altri metodi grafici, imperocchè crescono gli errori di graficismo, e le osservazioni intorno alla variabilità e determinazione del modulo superficiale μ^2 , della scala lineare $1/q$ e quindi della scala superficiale e speciale μ^2/q^2 conservano tutto il loro valore.

Tuttavia si possono scansare e le lunghezze ed i pericoli offerti dal planimetro. In vero, si faccia percorrere dal calcatojo dello strumento il perimetro del trapezio a cui spetta la frazione di quadrangolo di area ob-

(1) Le cose fin qui discorse valgono non solo nell'ipotesi che si cerchi l'area di una grande regione, di uno Stato, o delle grandi sue divisioni, ma anche quando trattasi di una piccola regione, delle varie divisioni amministrative di uno Stato. Allora l'area richiesta od è nel caso ora trattato, o si trova inscritta in un quadrangolo della rete, oppure è una somma di frazioni di consimili quadrangoli.

biettiva c , e dicasi N il numero dei giri indicati dalla rotella in tale percorso, w l'area obbiettiva del quadrangolo, si ha

$$w = HN.$$

Questa e l'ultima equazione del § precedente danno

$$c = \frac{n}{N} w$$

Adunque l'area obbiettiva c , porzione del quadrangolo w , si ottiene moltiplicando l'area di questo, calcolata col mezzo degli elementi dello sferoide terrestre, per il rapporto delle unità planimetriche somministrate dalle misure delle aree che sulla carta rispondono alle c e w .

Per tale modo non è necessario determinare il coefficiente h , ossia il valore dell'unità planimetrica; richiedesi solo la conoscenza del numero di cotali unità, con che il planimetro adempie il semplice ufficio di contatore. Si fa a meno della ricerca del modulo superficiale μ^2 e della scala $1/q$. Restano così eliminate le influenze delle alterazioni superficiali originate dal sistema di proiezione e dall'igroscopicità della carta, non che quelle causate dalla maggiore o minore sua levigatezza. Ma affinché sieno trascurabili gli effetti della rugosità ed in particolare guisa quelli dell'igroscopicità della carta, richiedesi che le operazioni planimetriche necessarie a trovare N e n si succedano immediatamente, in altri termini, che dal calcatolo del planimetro si facciano percorrere successivamente, senza frapporre lungo intervallo di tempo, i perimetri del trapezio e di quella sua frazione di cui cercasi l'area.

L'esposto metodo è dovuto al SAVITCH, professore di astronomia all'Università di Pietroburgo, il quale lo escogitò quando imprese a calcolare la superficie dell'Impero russo. Questa fu effettivamente calcolata sotto la direzione dello STRELBITSKY, generale dello Stato Maggiore, essendosi ad un tempo trovate le aree delle divisioni amministrative, dei laghi, ecc. (1) E quando più tardi lo stesso ricevette l'incarico di calcolare la superficie dell'Europa, de' vari suoi Stati, delle loro divisioni amministrative, dei laghi, dei mari interni, delle isole ad essa spettanti, non titubò a dare di nuovo la preferenza al metodo dello SAVITCH e tanto più che, essendosi consacrato per lunghi anni al calcolo della superficie, aveva sperimentati vari procedimenti in uso per tali delicate operazioni (2).

Fra le varie considerazioni, avvertenze e regole indicate dall'autore notiamo le seguenti. Detto che, trattandosi della scelta de' planimetri, ne

(1) Vedi l'opera: *Superficie dell'Impero russo nella sua totalità sotto il regno dell'Imperatore Alessandro II*, pubblicata in lingua russa nel 1874 dal Comitato scientifico militare dello Stato Maggiore Generale russo.

(2) *Superficie de l'Europe établie par F. Streblitzky, publication du Comité centrale russe de Statistique, traduit du russe par Nestor Masson. St. Pétersbourg, 1882.*

furono provati diciotto del sistema AMSLER ed accettati due soltanto, come offerenti le indicazioni più esatte percorrendo il perimetro della stessa figura sia da sinistra a destra, sia da destra a sinistra, lo stesso riferisce che in ogni operazione ha applicato il planimetro quattro volte di seguito, tanto alla frazione da misurarsi quanto al quadrangolo a cui spettava, due volte dalla destra e due dalla sinistra, cambiando ciascuna volta il polo dello strumento, la posizione della rotella e quella del nonio; che prendeva da prima la media delle due operazioni di destra, poi delle due di sinistra e infine la media dei due risultati; che collocava il polo del planimetro fuori della superficie da misurare per evitare le rettificazioni da farsi operando diversamente; che lento ed uniforme era il movimento del planimetro, affinché potesse girare uniformemente la sua rotella; che si cessava dall'operare ogni qual volta l'operatore provasse un senso di fatica, influenzando questa sinistramente sull'esattezza delle indicazioni dello strumento; che, misurata una frazione di superficie, tantosto si misurava il quadrangolo di cui essa faceva parte, a fine di evitare le variazioni della carta dovute al variare dell'umidità dell'atmosfera; che, sia per le frazioni di quadrangolo, sia per la totalità di questo, si procurava di eseguirne la misura con una sola operazione, perchè, se dividesi la figura in più parti e vi si applica isolatamente il planimetro, si ottiene un totale inesatto, e perchè l'errore cresce col crescere del numero di esse parti. Notiamo da ultimo che l'autore, quando vuole trovare l'area di una data figura, la considera sempre inscritta in un quadrangolo sferoidico, così che tra questa e quella e per ogni lato havvi sempre un'estensione finita.

Lo STRELBITZKY ha trovato, che la superficie totale occupata sul continente europeo dal Regno d'Italia, comprese le acque interne, è di chilometri quadrati 238,457.9; che, aggiungendovi la superficie delle Isole di Sicilia, Sardegna, Elba, ecc., le quali insieme fanno 50,081.9 km. q., la superficie totale risulta 288,539.8 (1); che la parte occupata dal Regno d'Italia nella superficie del continente europeo, non comprendendo in questo le isole ed il mare di Azof, è 0.025,617; che della superficie totale delle isole europee, comprese la Nuova Zembla e l'Irlanda, la parte insulare del Regno d'Italia è 0.075,371; che il nostro Regno occupa, nella superficie totale dell'Europa, una parte pari a 0.028,932. L'autore non solo ricercò la superficie della parte continentale e della insulare del Regno, ma determinò le aree di ciascuna delle 69 provincie e dei vari laghi in queste compresi.

I risultati ottenuti dallo STRELBITZKY hanno mostrato, come le anteriori statistiche che si avevano intorno al Regno d'Italia ne aumentavano

(1) Nel territorio del Regno d'Italia non è compreso quello della Repubblica di S. Marino che l'autore valuta in 35,6 km. q.

la superficie più del dovere; come le stesse dovevano contenere errori anche più notabili nella valutazione delle superficie dei circondari e delle provincie, poichè i divari fra i dati ufficiali e quelli del citato autore non erano tutti nello stesso senso, alcuni essendo positivi, altri negativi (1).

La Direzione generale della Statistica ed il Bollettino della Società Geografica Italiana avevano già, a più riprese, lamentata la poca sicurezza della valutazione della superficie del Regno d'Italia. E quando venne in luce l'opera dello STRELBITZKY, si acquistò la certezza della inattendibilità delle cifre che sino allora s'erano più o meno seguite e particolarmente per le provincie meridionali del Regno. Ed il WAGNER, professore di Geografia nell'Università di Gottinga e membro d'onore della nostra Società Geografica, fece sentire l'autorevole sua voce sulla necessità di attendere alla misurazione della superficie del nostro Regno appoggiata alle migliori carte ed ai migliori metodi (2).

Frattanto il nostro Istituto Geografico Militare volle fare un lavoro provvisorio e determinò approssimativamente le aree delle 16 regioni del Regno (3). I risultati ottenuti e comunicati nel 1883 alla Direzione Generale della Statistica mostrarono appunto la inattendibilità delle cifre ufficiali; ma la loro discordanza coi dati dello STRELBITZKY ingenerò ad un tempo il dubbio sulla bontà delle misure da questo autore eseguite, dubbio avvalorato da ciò, che fu poco felice la scelta delle carte dallo stesso adoperate (4).

A togliere in modo certo e definitivo i lamentati inconvenienti si accinse il nominato Istituto, il quale procedette alla valutazione della superficie del Regno sotto la direzione del colonnello DE STEFANIS, capo della Divisione geodetica, che ideò e curò tutto il lavoro e da ultimo pubblicò una Memoria sui metodi adottati e su tutte le operazioni eseguite, della quale diamo un breve cenno (5).

(1) Lo *Annuario statistico italiano per l'anno 1878* o l'altro del 1881, pubblicati dalla Direzione generale della Statistica, davano, correggendo i dati anteriori e benchè molti e molti rimanessero i dubbi e le incertezze, al Regno d'Italia la superficie di 296,305 km. q., superiore a quella trovata dallo STRELBITZKY di 7,765 km. q. Vedi a questo riguardo la Memoria del Prof. MARINELLI: *La superficie del Regno d'Italia secondo i recenti studi*, Venezia, 1883, estratta dagli *Atti del R. Ist. Veneto*, serie VI, vol. 1. Della quale Memoria l'autore pubblicò, nel 1884, una 3^a edizione con nuovi studi. Vedi pure l'altra Memoria del MARINELLI intitolata: *L'area del Regno d'Italia*, pubblicata nel *Bollettino della Società Geografica Italiana*, aprile, 1883.

(2) V. *Bollettino della Società Geografica Italiana*, maggio e giugno 1884, p. 444. — Vedi anche la cit. Mem. del prof. MARINELLI.

(3) MARINELLI, Mem. cit. p. 92.

(4) La Direzione generale della Statistica, per lo stato d'incertezza in cui si era intorno ai dati areometrici, nel pubblicare l'*Annuario statistico italiano per l'anno 1885*, mantenne i dati antecedenti, mettendovi accanto, per ciascuna provincia, quello dello STRELBITZKY, e valutò la totale superficie del Regno in 296,323 chil. q.

(5) Vedi la pubblicazione dell'Istituto Geografico Militare: *Superficie del Regno d'Italia valutata nel 1884*. Firenze, 1885.

Stabilita la rete de' meridiani e paralleli, calcolato il quadrangolo normale di ciascuna zona sferoidica limitata da due paralleli, considerato che la parte del territorio del Regno, compreso fra due paralleli della rete, si compone di un numero d'interi quadrangoli di uguale area w ed in ciascun estremo di una frazione di quadrangolo, alla ricerca di queste due estreme frazioni si applicò il metodo planimetrico ora esposto (1).

Se non che tale metodo, non mutandone la base, fu, di poco sì, ma utilmente, modificato. Detto che, nell'usare il planimetro per la valutazione delle frazioni di quadrangolo non richiedesi la conoscenza del valore della unità planimetrica e che i planimetri furono adoperati come semplici contatori, soggiungesi che, servendosi delle sole letture offerte dai singoli strumenti, si valutarono in unità del planimetro:

- a) l'intera superficie grafica del quadrangolo,
- b) la parte utile o piena,
- c) la parte estranea al territorio o vuota,
- d) infine di nuovo quella dell'intero quadrangolo;

che la somma delle due superficie, piena e vuota, dovendo reintegrare la superficie dell'intero quadrangolo, fu paragonata alla media delle due superficie totali per questo ottenute, distribuendone la differenza in ragione dell'estensione delle due superficie parziali; che la superficie parziale utile, così corretta, venne divisa per la media delle aree totali e moltiplicata per la superficie del quadrangolo calcolata in chilometri quadrati; che le operazioni eseguite con un planimetro vennero ripetute da altro operatore con altro planimetro.

I due planimetri polari (sistema AMSLER) adoperati nella misurazione e provenienti dalla officine di Kern in Aarau (Svizzera), sono tali, che si prestano alla valutazione di aree abbastanza grandi, pur tenendo il polo del planimetro fuori del disegno (2). Gli stessi furono saggiati per conoscere il grado di approssimazione che è lecito raggiungere. Da due diversi generi di esperimenti a cui furono sottoposti, fatti scrupolosamente e col metodo scientifico della teoria degli errori, si concluse: che l'errore medio di una misura semplice sorpassa, per eccezione, tre unità del planimetro su 10,000 unità di superficie misurate, potendosi in generale ritenere espresso dal rapporto di 5:10,000 (3); che l'errore medio relativamente più piccolo è quello che risulta dall'area più grande; che nel metodo di misura adottato fu tenuto conto di questa ultima considerazione, perchè le misure parziali vennero paragonate, come s'è detto, a quelle dei corrispondenti interi quadrangoli,

(1) Mem. cit., pag. 34.

(2) Per la misura di aree poco estese i planimetri sono forniti di un piccolo pantografo, per mezzo del quale si ottiene ingrandito il disegno di cui il calcatoio del pantografo percorre il contorno.

(3) Mem. cit., p. 37.

e la misura di questi, comparando al denominatore, serviva ad attenuare gli errori relativamente più grandi delle misure parziali (1); che l'errore medio di una misura semplice, il quale per le grandi aree può ritenersi di 1:10,000 e per le piccole di 1:2,000 ed è per sè stesso accettabile, restava di molto attenuato nel medio dei risultati, essendo questi dipendenti da otto misure, cioè quattro per ciascuno dei due planimetri; che infine le concordanze ottenute negli esperimenti dei due planimetri mostrano la loro perfetta costruzione (2).

A tali importanti notizie ne aggiungiamo poche altre, lasciando al lettore la cura di compulsare la citata Memoria per avere ragguagli più ampi e minuti.

I quadrangoli normali *w*, le cui aree furono trovate col calcolo e che rispondono ai fogli della carta d'Italia alla scala di 1:100,000, sono racchiusi da due archi di meridiano distanti in longitudine per 20' e da due archi di parallelo distanti in latitudine per 30' (3). I quali quadrangoli, in sui confini, sono generalmente, per mezzo di meridiani e paralleli equidistanti suddivisi in altri quattro od anche in sedici.

Le aree delle frazioni di quadrangolo e delle loro suddivisioni, poste verso i confini del territorio italiano ed a questo spettanti, furono trovate graficamente coll'indicato metodo, ricorrendo alle carte topografiche originali ed in mancanza di queste, alle riprodotte. Si è data la preferenza alle levate originali di campagna, alle scale di 1:50,000 e di 1:25,000, che si sono fatte e si stanno facendo per la nominata carta d'Italia alla scala di 1:100,000 (4). Ma, essendo esse incomplete, si ricorse, per la parte mancante, ai di-

(1) Mem. cit., p. 33.

(2) Mem. cit., p. 34.

(3) Nella scelta degli elementi terrestri fu data la preferenza a quelli del Bessel: 1° perchè servono e servono a stabilire il reticolo geografico della carta d'Italia in via di costruzione; 2° perchè essi corrispondono abbastanza bene agli elementi terrestri calcolati in base alla porzione della triangolazione di 1° ordine che si estende lungo la zona meridiana limitata dai paralleli di Catania in Sicilia e di Lissa in prossimità delle coste dannate e che comprendono circa 5° di latitudine, cioè quasi la metà dell'estensione di tutta l'Italia nella direzione del meridiano.

(4) Ciaschedun foglio della carta d'Italia alla scala di 1:100,000 risponde ad un quadrangolo dello sferoide terrestre, limitato da due archi di parallelo e da due archi di meridiano, ampie questi 20', quelli 30'. Il meridiano centrale ed il parallelo medio del quadrangolo sferoidico sono sulla carta figurati da due linee rette fra loro perpendicolari che ne sono la rettificazione. Alle quali rette, come ad assi rettangolari, si riferiscono i vari punti del foglio, le cui coordinate sono gli sviluppi degli archi di meridiano e di parallelo che da essi punti vanno al parallelo medio ed al meridiano centrale. L'Istituto Geografico Militare applica tale proiezione ad ogni singolo foglio della carta d'Italia e la denomina proiezione naturale. (*Istruzioni sulla proiezione naturale applicata alla formazione della carta d'Italia e sul collocamento dei punti geodetici sui fogli, compilate dall'Istituto Topografico Militare*. Firenze, 1879).

E però ciascun foglio non è altro che la rappresentazione equivalente sinuoidale (detta anche comunemente proiezione del FLAMSTEED ed inventata dal MASCARONE) del rispondente quadrangolo sferoidico. (Vedi nella cit. opera, Cap. VI, §§ 13 e 14).

Le levate che l'Istituto compie alle scale di 1:50,000 e di 1:25,000 sono considerate come suddivisioni del foglio alla scala di 1:100,000, la cui grandezza corrisponde per la scala di 1:50,000 alla levata topografica di 1/4 di foglio e per la scala di 1:25,000 alla levata di 1/16 di foglio. La prima levata è detta quadrante, la seconda tavoletta. Dal che si deduce che il foglio alla scala di 1:100,000, il qua-

segni originali della carta degli antichi Stati Sardi in terraferma alla scala di 1:50,000 (1), alla riproduzione incisa della carta del Lombardo-Veneto e dell'Italia centrale alla scala di 1:86,400 pubblicata all'Istituto Geografico Militare di Vienna (2), e per l'isola di Sardegna ai disegni originali della Carta LA MARMORA (3). E qui notiamo subito, che è esposto il modo col quale si è ottenuto l'accordo delle varie carte di diversa origine, in guisa da tener conto del conseguente divario delle posizioni geografiche ed in modo che fosse evitata ogni soluzione di continuità, che, cioè, nel passare dall'una all'altra carta, non avvenissero nè lacune nè sovrapposizioni di territorio.

I vari risultati furono assoggettati ad una fine analisi, alla quale è fatta precedere l'osservazione:

drante alla scala di 1:50,000, la tavoletta alla scala di 1:25,000, hanno, su per giù, la stessa grandezza, cosa importante perchè servi di guida nello stabilire l'ampiezza delle zone sulle quali si applicarono i calcoli e le misure.

L'origine delle longitudini per la carta d'Italia è nel meridiano che passa per l'Osservatorio di Villa Barberini sul Monte Mario presso Roma, del quale Osservatorio, ora demolito, si è conservata la precisa traccia nello antico centro trigonometrico. L'incontro di tale meridiano col parallelo di 42° di latitudine è l'origine della suddivisione dell'Italia nei quadrangoli rispondenti ai fogli della carta.

(1) La carta degli antichi Stati Sardi in terraferma, alla scala di 1:50,000, comprende 91 fogli, che ora, per la soppressione dei tre ultimi, sono ridotti a 88 e di cui ciascuno ha sette decimetri di lunghezza e cinque di larghezza. Il centro della proiezione che è, ad un tempo, origine delle coordinate rettilinee, è al centro del circolo meridiano stabilito nell'Osservatorio Reale di Torino. Per determinare sui fogli la proiezione dei meridiani e dei paralleli se ne calcolarono le intersezioni di 5 in 5 minuti primi. Così è detto nei *Cenni sulla costruzione della Carta*, che si trovano nel foglio 3°, ed in cui dicesi inoltre come per punti trigonometrici di 1° e 2° ordine si sieno calcolate, oltre le posizioni geografiche, le coordinate nella proiezione equivalente del BONNE, e per punti di 3° ordine sole le coordinate nel sistema dei CASSINI, partendo dai punti che hanno servito alla loro determinazione.

Hanno avuto d'uopo di tale carta le frazioni di quadrangolo che, verso il confine settentrionale, sono a ponente del Lago Maggiore per 1° 15 di longitudine.

(2) Le carte del Lombardo-Veneto, del Ducato di Parma, Piacenza e Guastalla, del Ducato di Modena, degli antichi Stati pontifici, del Granducato di Toscana, del Ducato di Lucca, pubblicate alla scala di 1:86,400 dell'Istituto Geografico Militare di Vienna, sotto la cui direzione furono costruite ed intagliate in pietra, sono nella proiezione del CASSINI, coincidendo, per tutte le nominate carte, il centro della proiezione, ossia l'origine delle coordinate, colla cupola del Duomo di Milano, essendo i lati dei fogli paralleli alla meridiana ed alla perpendicolare del detto punto, ossia della guglia principale del Duomo ed essendo sopra i medesimi segnate le intersezioni de' meridiani e de' paralleli. Vedi il *Cenno sulla carta topografica dell'Italia media comprendenti lo Stato della Chiesa, il Granducato di Toscana ed il Ducato di Lucca costruite alla scala di $\frac{1}{86,400}$ del naturale*, contenuto nel foglio (C, 6).

Vedi anche, nei fogli (C, 12) e (I, 13), l'osservazione posta ai piedi dell'elenco delle posizioni geografiche dei punti trigonometrici che hanno servito a coordinare fra loro i vari elementi topografici concorrenti alla formazione della carta. Vedi pure, nel foglio IV della Carta del Ducato di Parma, Piacenza e Guastalla, il *Cenno sulla formazione della Carta*.

(3) La carta dell'isola di Sardegna alla scala di 1:50,000, proveniente dai lavori dei generali LA MARMORA e DE CANDIA, non è stata mai riprodotta e fu delineata quando, già da 10 anni e più, appariva al pubblico, per opera del La Marmora, la carta della stessa isola alla scala di 1:250,000. Ambe le carte sono costruite nella proiezione equivalente del BONNE, essendo l'origine delle coordinate nell'intersezione del meridiano col parallelo sul punto trigonometrico Torre di S. Pancrazio presso Cagliari, al quale fu attribuita la latitudine di 39°, 13', 14", 44 e la longitudine di 6°, 47', 23", 92 all'oriente di Parigi. La prima delle nominate carte, a differenza della seconda, non porta tracciate le linee di latitudine e longitudine; dessa è divisa in 49 fogli rettangolari, i cui lati sono di 5 e 7 decimetri.

« che i fogli dell'Isola di Pantelleria e quelli dell'Isola di Sardegna non possono presentare alterazioni dovute al distacco di essi dalle tavole lette da disegno, poichè per l'Isola di Pantelleria il reticolo, formato con quadrati aventi 0,31 di lato, fu tracciato all'atto della misura in fogli che già erano distaccati dalle tavolette; lo stesso dicasi per l'Isola di Sardegna, per la quale si ha ragione di credere, che l'eseguimento dei disegni originali fu compiuto su fogli sciolti, preventivamente incollati su tela. L'alterazione quindi che le dette Carte possono presentare è dovuta soltanto allo stato igroscopico di esse.

« Le levate invece al 25,000, quelle al 50,000 ed i disegni originali della Carta al 50,000 degli antichi Stati Sardi in terraferma costituiscono disegni distaccati dalle tavolette; debbono perciò presentare alterazioni provenienti anche da questa ultima causa, la quale produce un restringimento nei fogli.

« Infine, per la riproduzione incisa della Carta del Lombardo-Veneto ed Italia centrale alla scala di 1 : 86,400, la causa principale di alterazione è dovuta al restringimento che subiscono i fogli prosciugandosi dopo la tiratura. »

Separatamente furono calcolate le superficie dell'Italia continentale e peninsulare, delle isole maggiori, minori e minime (1). Ed ecco il risultato finale in chilometri quadrati:

SUDDIVISIONE DELL'INTERA SUPERFICIE DEL REGNO D'ITALIA	Parte dedotta col calcolo	Parte dedotta col planimetri	TOTALE
(a) Parte continentale e peninsulare (2)	184980,6246	51421,5474	236402,1720
(b) Isole comprese nella circoscrizione amministrativa della parte continentale e peninsulare.....		368,8649	368,8649
(c) Isola di Sicilia (escluse le isole minori)	15108,9195	20352,3540	25461,2735
(d) Isole comprese nella circoscrizione amministrativa della Sicilia	19,9200	259,5947	278,5147
(e) Isola di Sardegna (escluse le isole minori).....	15312,5000	8487,0607	23799,5607
(f) Isole comprese nella circoscrizione amministrativa della Sardegna		277,6027	277,6027
	215421,2641	71167,0044	286588,2685

(1) Di alcune isole minori che, per la loro giacitura, rimangono fuori della suddivisione normale della carta d'Italia furono calcolate appositamente le aree terrestri racchiuse entro i margini di ciascuna carta speciale, riducendo questi margini, per certune, a contenere in latitudine e longitudine un numero esatto di minuti primi o di mezzi minuti (Mem. cit., p. 20). — Delle isole piccolissime, che nell'insieme non giungono a 25 chil. quadrati, si ottennero le singole superficie mediante otto misure direttamente eseguite con due planimetri senza rapportarle all'area del quadro di contorno e facendo uso di un coefficiente medio per ciascuno strumento (id., p. 40).

(2) In questa parte non è compresa la Repubblica di S. Marino, del cui territorio la superficie si trovò essere in chil. quadrati 59,3946.

Siccome le misure eseguite coi planimetri sono soggette ad errori, così per ciascuna delle sei parti in cui fu suddiviso il territorio del Regno italiano si calcolò l'errore probabile in chilometri quadrati, che si trovò essere per la parte (a) $\pm 1,13$, per la (b) $\pm 0,07$, per la (c) $\pm 0,35$, per la (d) $\pm 0,10$, per la (e) $\pm 0,24$, per la (f) $\pm 0,10$. E si trovò $\pm 1,21$ per l'errore probabile relativamente alla totale superficie del Regno. Si concluse finalmente che « la superficie totale del Regno d'Italia (le acque interne comprese) ridotta al livello del mare, risulta in chilometri quadrati

$$286,588.3 \pm 1,2.$$

A risultato diverso era giunto lo STRELBITZKY (1). Il quale trovò la superficie del Regno d'Italia essere in chilometri quadrati 288,539.8 (2), superiore di 1951,5 chilometri quadrati a quella rinvenuta dal nostro Istituto geografico militare. Nella più volte citata Memoria (p. 104) osservarsi che tale divario è essenzialmente dovuto alla misura della parte continentale e peninsulare, per la quale il detto autore adoperò due carte a piccola scala, cioè quella dell'Italia superiore e centrale alla scala di 1 : 600000 e l'altra delle provincie napoletane alla scala di 1 : 250000; che lo sviluppo lineare totale della frontiera potendosi ritenere di circa 5500 chilometri, a produrre la detta differenza è sufficiente l'alterazione di una frazione di millimetro lungo il contorno disegnato sulle nominate carte, che è accettabile la differenza di poco più di 50 chilometri quadrati per l'isola di Sicilia (3); che per l'isola di Sardegna la differenza di circa 250 chilometri quadrati sarebbe grave nel caso che l'Istituto Geografico e lo STRELBITZKY avessero adoperato la stessa Carta.

L'Istituto Geografico Militare attribuisce un carattere provvisorio all'attuale valutazione della superficie del Regno d'Italia, perchè sono incomplete le operazioni geodetiche e topografiche. Ma ha ragione di ritenere soddisfacenti i risultati ottenuti e tali da potersi, in avvenire, rettificare con facilità.

« Le nuove operazioni geodetiche, è detto (4), non potranno produrre dure alterazioni sensibili sui risultati ottenuti. Una prova l'ha offerta il confronto fra la nuova e la vecchia triangolazione della Sardegna, dove, benchè si abbiano differenze eccezionali fra i lati comuni alle due reti trigonometriche, pure l'effetto sul totale della superficie dell'isola si riduce a 15 chilometri quadrati; cioè al rapporto di 1 : 600 circa. Questo rapporto, non grave per sè stesso, non sarà certamente raggiunto pel resto

(1) *Superficie de l'Europe établie par J. STRELBITZKY*. St.-Petersbourg. 1882.

(2) Non è compresa la Repubblica di S. Marino, a cui l'autore assegna 86,5 chil. quadrati.

(3) Per la Sicilia lo STRELBITZKY adoperò la Carta alla scala di 1 : 100,000 nata da una riduzione fotografica delle levate originali alla scala di 1 : 50,000.

(4) Mem. cit., p. 109.

« d'Italia; poichè le moderne triangolazioni, paragonate alle antiche del Piemonte e del Marieni, non presentano, in nessun caso, fra i logaritmi dei lati rispettivi, differenze che ne intacchino la 4^a cifra decimale, come appunto accade per l'isola di Sardegna.

« Lo stesso dicasi degli elementi terrestri, per i quali la discrepanza maggiore è di 150 chilometri quadrati per tutta la superficie del Regno fra quelli del DELAMBRE, i più antichi, e quelli del CLARKE (1880), i più moderni. Inoltre, anche in questo riguardo, abbiamo fondate ragioni di credere, che non ci discosteremo troppo dagli elementi del BESSEL da noi adottati, poichè essi già dettero indizio di accordarsi abbastanza bene con le nostre triangolazioni, combinate con le posizioni geografiche astronomicamente determinate e per le quali non si verificarono discrepanze tali da far temere l'influenza di attrazioni locali.

« Per quanto concerne la parte topografica, i confronti istituiti fra le vecchie Carte e le nuove, se non sono soddisfacentissimi, non sono neppure dirsi sfavorevoli. È da prevedersi perciò che le future rettificazioni, senza essere ragguardevoli, presenteranno non pertanto una certa entità, dovuta essenzialmente ai difetti topografici che le vecchie Carte manifestano nella parte montuosa della frontiera, ed all'accrescimento graduale di territorio che si verifica quasi da per tutto lungo le nostre spiagge. D'altra parte le misure da ripetersi si riferiscono ad una porzione relativamente piccola del territorio italiano, non tenendo conto dell'Isola di Sardegna, dove la vecchia Carta dovrà intieramente sostituirsi con la nuova.

« Dalle fatte considerazioni si deduce che le sole rettificazioni che abbiano importanza e che bisognerà mano mano introdurre nel presente lavoro si riferiscono alla parte topografica. Ciò riuscirà facile considerando, che le misure parziali da noi eseguite sono in perfetta armonia con la suddivisione adottata per la Carta d'Italia in via di costruzione e che basterà perciò pubblicare di tanto in tanto un'appendice all'attuale valutazione. »

L'opera del nostro Istituto Geografico fu accolta da tutte parti con plauso. Ma non poteva acclamarsi compiuta. Si conosce la superficie totale del Regno, si hanno le aree della parte continentale, della peninsulare, delle isole, ma non si sono valutate le superficie delle circoscrizioni amministrative, la cui cognizione è cotanto necessaria alla statistica per la ricerca e lo studio di molti e molti fatti economici e sociali (1): L'in-

(1) Dal confronto dei dati dello STRELBITZKY con quelli dell'Istituto Geografico è possibile dedurre, con semplici proporzioni, le aree delle singole provincie? No! La diversità degli elementi cartografici dallo stesso adoperati rende incomparabili le dette aree fra loro e coll'area totale. D'altra parte è incerta la delimitazione di alcune provincie.

certezza dei confini di non pochi comuni, la quale, in generale, si riverbera sulle linee di delimitazione dei circondari e delle provincie, ha impedito all'Istituto di compiere l'opera intrapresa (1). Ma i cultori della geografia e della statistica, premurosi di vedere il compimento dell'opera, non cessarono dal fare voti che presto si addivenisse allo stabilimento dei confini, ora incerti, per potere indi procedere al calcolo delle aree delle circoscrizioni amministrative, oppure, che, in mancanza del meglio, le stesse si calutassero in modo provvisorio, ritenendo come veri i confini segnati sulle attuali Carte ufficiali. La quale provvisorietà sarebbe, in certo qual modo, in armonia col carattere della valutazione dell'area totale, non essendo questa definitiva, poichè per alcune parti del Regno, a misura che si compiranno i lavori topografici e cartografici, si dovranno rettificare i risultati già ottenuti (2). La Società Geografica Italiana si adoperò anch'essa ad affrettare il nuovo lavoro (3) ed ormai l'Istituto Geografico militare ebbe l'incarico di valutare le aree delle provincie e dei circondari del Regno. L'Istituto ben tosto si mise alacremente all'opera, affidandone la direzione al colonnello DE STEFANIS, capo della Divisione geodetica dell'Istituto, il quale, avendo condotta così mirabilmente la prima parte del lavoro, offre sicura arra dell'alto grado di perfezione a cui giungerà la seconda. Se non che il compimento di questa richiederà molto tempo, poichè il tracciamento dei confini, benchè provvisorio, non è cosa da eseguirsi su due piedi. E ciò è sì vero, che il lavoro, sollecitamente incominciato sin dall'anno scorso, è ora sospeso. Ma ad ogni modo lo stesso si compierà, salvo a recarvi, ulteriormente, le opportune correzioni, quando nella formazione del Catasto si stabiliranno in modo definitivo i perimetri di confine dei comuni del Regno.

E la superficie dell'intera Italia quale è? Motivi politici forse distolsero e distoglieranno il nostro Istituto Geografico dall'occuparsene. La citata opera dello STRELBITZKY potrebbe giovare a determinarla in via approssimativa. Ma noi qui facciamo un voto. Sorga un cultore delle scienze geografiche e trovi le aree delle regioni italiane che non fanno parte del nostro Regno. Alla superficie del territorio continentale che « il Mar circonda e l'Alpe », accennando solo alle parti maggiori, debbono essere aggiunte le aree del Nizzardo, della Svizzera italiana, del Trentino, del-

(1) Nel formare la carta d'Italia alla scala di 1:100,000 si badò al solo scopo militare. Lo stabilire le linee di confine dei comuni e quindi dei circondari e delle provincie avrebbe richiesto mezzi superiori a quelli di cui poteva disporre l'Istituto Geografico.

(2) I professori MARINELLI (*La nuova valutazione areometrica del Regno d'Italia*, Venezia 1885. Dagli *Atti dell'Istituto Veneto*, Serie VI, Tom. III) e DALLA VEDOVA (*Bollettino della Società Geografica Italiana*, agosto, 1885) si occuparono di sì vitale questione. Ambi giunsero alle stesse conclusioni e proclamarono la necessità di procedere, in via provvisoria e ritenuti i confini segnati sulle carte ufficiali, al calcolo delle aree delle circoscrizioni amministrative.

(3) *Bollettino della Società Geografica Italiana*, agosto, 1885.

T'istria; alla superficie del territorio insulare mancano le aree della Corsica e di altre isole minori.

Il metodo immaginato dal SAVITCH (1) per dedurre col mezzo del planimetro le aree delle varie plaghe figurate in una carta geografica può ricevere altre utilissime applicazioni e particolarmente nella formazione di un catasto per la valutazione delle aree delle proprietà o delle loro particelle. Ed è questo un argomento di attualità, sendo che si debba ora procedere alla catastazione di tutto il Regno d'Italia. In vero quando il rilevamento catastale sia fatto in guisa, che le mappe vengano ad essere come una figliazione dei fogli della carta d'Italia alla scala di 1:100,000, o dei loro quadranti alla scala di 1:50,000, o delle loro tavolette alla scala di 1:25,000, e sieno graduate portando segnate le linee dei meridiani e paralleli abbastanza fitte, da potere servire all'appropriato uopo, allora ad avere l'area di una plaga segnata sulla mappa può adoperarsi il metodo dello SAVITCH. La quale plaga sarà una proprietà od una sua particella. Se le mappe non sono graduate, sarà necessario che vi sieno delineati i triangoli trigonometrici i cui vertici servirono di capisaldi alle operazioni topografiche, cioè dire al rilevamento particolare. Dicendo p l'area di una certa plaga, ad esempio, di una proprietà o di una sua particella, T l'area del triangolo trigonometrico in cui la detta plaga trovasi inscritta, calcolata in base de' suoi noti elementi, n e N i numeri dei giri indicati dalla rotella del planimetro nel percorrere i perimetri delle aree p e T , si ha seconda la formola trovata più indietro:

$$p = \frac{n}{N} T.$$

E però l'area di una plaga p uguaglia il prodotto della superficie del triangolo trigonometrico in cui essa è inscritta, calcolata in base de' suoi elementi, per il rapporto delle unità planimetriche somministrate dalle misure delle aree che sulla mappa rispondono alle aree p e T .

Avvenendo che la plaga p cada per una parte in uno, per l'altra in altro triangolo, se ne valuteranno separatamente le due porzioni e se ne farà la somma, oppure si applicherà la formola precedente, ritenendo che T significhi la somma delle aree dei due triangoli e N il numero dei giri segnati dalla rotella del planimetro nel percorrere il perimetro del quadrangolo da essi formato.

Ed è pure chiaro che la nominata formola vale anche quando T esprima l'area di un poligono trigonometrico, in cui sia inscritta la plaga p , calcolata per mezzo dei suoi noti elementi, e N il numero dei giri dati dalla rotella del planimetro nel percorrerne il contorno.

(1) Vedi più indietro.

L'ultima questione trattata dal chiarissimo prof. Fiorini riguarda il modo di dedurre dall'angolo di due linee segnate sulla carta l'angolo obbiettivo ; il quale, come si sa, è soggetto in generale ad alterarsi nella rappresentazione. L'autore anzitutto considera il caso dell'angolo che una certa linea fa, in un dato punto, col meridiano, caso contemplato a pag. 42 dell'opera: *Le proiezioni delle carte geografiche*, semplifica le formole che là si trovano, discorre del modo di usarle, dicendo come sia utile ricorrere alla tavola delle tangenti, ed osserva come viepiù si semplifichino quando i meridiani ed i paralleli si tagliano sulla carta ad angolo retto. E conchiude che a sciogliere la questione capitale messa superiormente, basta trovare le inclinazioni obbiettive che i due lati dell'angolo dato nella rappresentazione hanno sul meridiano, poichè la loro differenza uguaglia l'angolo obbiettivo richiesto. E dopo di avere osservato, come le nominate formole ricevano ulteriore semplificazione nei casi delle proiezioni quantitative ed equivalenti e come nelle isogoniche se ne faccia a meno, perchè l'angolo obbiettivo serbasi inalterato nella rappresentazione, accenna alle difficoltà che possono insorgere per l'igroscopicità della carta.
