

C. — SULLE FORMULE OROMETRICHE
PROPOSTE DAL GENERALE C. SONKLAR.

Osservazioni del prof. GIUSEPPE RICCHIERI.

1. Sono ancora pochi i geografi che di proposito s'occuparono della *Orometria*, quella parte dell' Orografia che si propone la completa misurazione dei sistemi montuosi sotto tutti i rapporti, di lunghezza, d'altezza, di superficie, di volume, per poterli poi confrontare tra loro.

Il genio di Humboldt, che tanta luce diffuse sopra tutte le questioni geografiche del suo tempo, e di tante altre fu vero iniziatore, gettò anche dell' Orometria i primi fondamenti. E per quanto possa parere audacia la sua d'aver voluto determinare, con i pochi e non sicuri dati d'allora, il volume dei sistemi montuosi della terra e per di più l'altezza media che avrebbero i continenti se la massa dei monti fosse ugualmente distribuita sulla loro superficie, è certo che concepì egli per primo l'idea di simili ricerche.

Più tardi il Leipoldt (1) rifece con materiale più copioso e più esatto i calcoli dell' Humboldt, senza però modificarne gran fatto i procedimenti, e perciò senza molto giovare all' Orometria generale; della quale toccò anche W. Huber (2) nel suo articolo del Bollettino della Società Geografica di Parigi, noto più che altro ed importante per la *legge degli sbocchi* che vi è la prima volta enunciata.

L'Autore che senza dubbio trattò con maggiore larghezza e profondità le questioni orometriche e primo stabilì delle formule generali di calcolo, è il generale austriaco Carlo Sonklar v. Jnnstädten (3). E le sue conclusioni sono esposte nei migliori e più vasti trattati della scienza geografica (4) e le sue formule furono accettate, sebbene con qualche riserva, da illustri geografi che se ne giovarono per la misura di qualche speciale sistema montuoso (5). Nè credo che punto scemi il merito del dottissimo

(1) LEIPOLDT. *Ueber die mittlere Höhe Europas*. Placen-Neuport, 1874.

(2) HUBER WILLIAM. *Considérations générales sur les Alpes centrales*, in *Bulletin de la Soc. de géogr. de Paris*, Paris, 1866, tom. XI, pag. 105-144.

(3) CARL SONKLAR VON JNNSTÄDTEN. *Allgemeine Orographie*. Wien, 1873, II parte. *Orometrie*. E dello stesso vedi: *Die Oetzthaler Gebirgsgruppe*, Gotha, 1860. *Die Zillertaler Alpen nelle Mittheilungen di Petermann*, 1872. *Die Gebirgsgruppe der Hohen Tauern*, Wien, 1866. *Die Gebirgsgruppe des Hochschwab* nei *Sitzungsberichte der K. K. Akademie der Wissenschaften di Vienna*. Vol. 34, 1859.

(4) RECLUS E. *La Terre*, Paris, 1877. Vol. I, pag. 168-171. Marinelli G. *La Terra* (in corso di pubblicazione). Vallardi, Milano. Vol. I, pag. 325.

(5) SUPAN ALBX. *Studien über die Thalbildungen des östlichen Graubündens und der Tiroler-Central-Alpen* Wien, 1877. MARINELLI, *Saggio di Orometria friulana in Annuario statistico dell' Accademia di Udine*. Anno IV.

autore se alcuno, riprendendo a considerare le sue formule, dubiti della loro esattezza ed opportunità, e le prenda a discutere come ora io mi accingo a fare.

2. Vediamo innanzi tutto quali sono le principali formule proposte dal Sonklar:

1) Per trovare la media altezza delle vette, chiamando ΣV la somma totale delle altezze delle vette, v il loro numero, la formula è

$$\frac{\Sigma V}{v}$$

2) Similmente per le selle $\frac{\Sigma S}{s}$, dove ΣS è la somma totale delle altezze delle selle, s il loro numero.

3) Il medio scarto o differenza tra le medie 1) e 2)

$$\frac{\Sigma V}{v} - \frac{\Sigma S}{s} = \frac{s\Sigma V - v\Sigma S}{vs}$$

4) La media altezza della intera catena è la media delle medie 1) e 2)

$$\frac{\frac{\Sigma V}{v} + \frac{\Sigma S}{s}}{2} = \frac{s\Sigma V + v\Sigma S}{2vs}$$

5) Per trovare l'angolo medio d'inclinazione d'un dato pendio il Sonklar fissa un punto sul monte ed uno nella valle e chiamando φ l'angolo cercato, a la differenza d'altezza tra il punto elevato e quello della valle, d la distanza orizzontale dei due punti, trova

$$\text{tang } \varphi = \frac{a}{d}$$

La distanza orizzontale egli misura sopra una buona carta geografica.

L'angolo medio d'inclinazione d'una catena è la media degli angoli determinati per un gran numero di vette e di selle.

6) La media altezza d'una valle s'ottiene misurando molti punti di essa dal suo principio allo sbocco e facendone la media.

7) Perchè l'altezza assoluta d'un monte è raramente uguale alla relativa ed una catena sorge per solito sopra un terreno già elevato sul livello del mare, la catena è immaginata dal Sonklar come un prisma triangolare elevato sopra un parallelepipedo rettangolare (zoccolo). La vera altezza media della catena è la differenza tra l'altezza media sul livello del mare (formula 4) e l'altezza dello zoccolo. Ora quest'ultima si ottiene facendo la media delle medie altezze delle valli longitudinali, che da un versante e dall'altro determinano la catena.

8) Il volume dello zoccolo è uguale ad Sa , dove a è la sua al-

tezza (formula 7), S l'area della base della catena che si può misurare sopra una buona carta col planimetro.

9) Il volume del prisma triangolare, rappresentante la catena, si ottiene colla formula

$$a^2 \times \cotang \varphi \times \Sigma l$$

essendo a l'altezza del prisma (uguale, come vedemmo, alla media altezza della catena sul livello del mare, meno l'altezza dello zoccolo): Σl la lunghezza della catena: φ il medio angolo d'inclinazione.

10) Il volume di tutta la catena è dunque (formule 8 e 9)

$$S a + (a^2 \times \cotg \varphi \times \Sigma l)$$

Per altre formule, facilmente ricavabili dalle precedenti, rimandiamo al lavoro del Sonklar.

Noi vogliamo qui esaminare alcune delle riportate.

3. E cominciamo dalla 4), nella quale già si comprendono le due prime.

Si determina, dunque, la media altezza della catena computando la media altezza delle vette e la media altezza delle selle: si addizionano e si divide per metà.

Il computo è, come si vede, analogo a quello per le medie meteorologiche: ma il Sonklar crede che non ne abbia gli inconvenienti e che i risultati siano di più giusto e men fittizio valore (1). Ora io credo che tale opinione non sia abbastanza esatta.

Se in fatti in una catena si trovano selle molto depresse e vette molto elevate, qual differenza tra questa e la media atmosferica di paesi di clima eccessivo?

Per recare un esempio delle nostre Alpi, nelle Giulie, che non sono come le Carniche ed i Tauern una catena continua, quasi un ingente muraglia merlata, ma sono costituite d'un gran numero di contrafforti staccantisi dai nuclei dell' *Iof del Montasio* e del *Canino*, la linea di dislivello è un alternarsi di vette elevate e di larghe selle. Una media altezza di questa linea, secondo la formula del Sonklar, non avrebbe che un valore assai limitato.

Ma c'è ancora un altro inconveniente, sebbene di carattere temporaneo.

È manifesto che in una catena il numero delle selle è pari a quello delle vette più una. Eppure per molte ragioni i dati altimetrici delle selle, se vanno ora aumentando, sono stati finora e sono anche assai men numerosi che per le vette; e per di più le selle misurate sono i passi percorsi da qualche via, cioè le più importanti e generalmente non le più alte.

(1) *Op. cit.*, pag. 192.

Perciò, col materiale altimetrico che abbiamo, sebbene senza confronto più copioso che ai tempi dell'Humboldt, la media altezza riesce ancora inferiore alla vera.

Così p. e. il prof. Alessandro Supan (1) determinò la media altezza dello spartiacque principale nelle Alpi centrali del Tirolo con soli 33 dati di selle di fronte a 144 di vette, sopra una lunghezza di circa 216 chilometri. In questo calcolo, dall'ammettere o no le profonde selle di Reschen e del Brennero risulta nella media altezza totale una differenza di metri 64,692 che nel volume della catena porterebbe, secondo le formule del Sonklar, un errore, in meno, uguale ad un prisma alto m. 64,692 lungo 216 kilom. e largo quanto la media larghezza della catena.

E se, invece dell'intera catena, consideriamo solo il primo tratto di essa dall'Inn (Reschenscheideck) al Brennero, l'errore vien raddoppiato (m. 129,391) (2).

Tuttavia crescendo il numero delle selle misurate, l'errore diminuisce, tanto più che intaccature così profonde come quella di Reschen e del Brennero non sono frequenti.

Ma, prescindendo anche da tutto ciò, qual è il valore e l'importanza d'una media altezza così determinata?

Nei confronti tra le catene semplicemente rispetto all'altezza per sè stessa, senza riguardo cioè al volume, questa media può avere un valore. Ma dal fatto che il Sonklar introduce questa media nella formula 9) per determinare il volume, appare che la ritiene una stessa cosa con l'altezza che avrebbe la catena, quando la massa fosse disposta in modo uniforme, per modo cioè da formare un prisma triangolare che ha per base la base della catena.

E questo è un errore che procurerò ora di dimostrare.

(1) *Op. cit.*, pag. 32 e seg.

(2) Ecco il prospetto dei computi:

Altezza media delle vette nel 1° tratto (tra Reschenscheideck ed il Brennero)	m. 3129.23
Id. delle selle nel 1° tratto (Reschenscheideck e Brennero non comprese)	» 2984.10
Id. delle selle nel 1° tratto (Reschenscheideck e Brennero comprese)	» 2725.33
Id. del 1° tratto (Reschenscheideck e Brennero non comprese) (*)	» 3056.66
Id. dello stesso, ma comprese le due selle	» 2927.27
Differenza m. 129.39	
Id. delle vette nel 2° tratto tra il Brennero e Schneewinkel	» 3115.55
Id. delle selle	» 2750.28
Id. di tutto il 2° tratto (**)	» 2932.92
Id. dell'intera catena (Reschenscheideck e Brennero escluse)	» 2994.79
Id. della catena comprese le due selle (***)	» 2930.10
Differenza m. 64.69	

(*) Non so comprendere come il Supan per la stessa altezza abbia m. 3090. Rifatto il calcolo, a me risultano m. 3056.66.

(**) Questa media corrisponde con quella del Supan.

(***) La differenza di questa media altezza totale con quella del Supan (m. 2946) dipende forse dal primo errore notato nella media altezza del 1° tratto.

4. Chiamerò, per brevità, *altezza media lineare* quella ottenuta con la formula 4) del Sonklar, perchè è realmente come la media di tante rette rappresentanti le altezze di quante son le vette e le selle considerate; *altezza media di volume* quella ottenuta da una immaginaria uniforme disposizione della materia nella catena.

Che siano realmente diverse tra loro, si può vedere con una semplicissima, eppur fondamentale, osservazione.

I due triangoli ACB, DCE (fig. 1) rappresentano in sezione due selle, che hanno uguali tutti gli elementi, fuorchè le distanze AB, DE delle vette da cui sono determinate.

FIG. 1

Essendo l'altezza FC la stessa, le due selle influiranno ugualmente nella media altezza lineare: eppure per la loro differenza d'ampiezza il volume della catena sarà ben diverso, e per conseguenza diversa anche la media altezza di volume. Essendo DE un sesto di AB , una sella equivalente alla ACB , sarebbe la DGE in cui l'altezza FG è sei volte la FC .

Questo, considerando il solo elemento della distanza tra le due vette e lasciando inalterati gli altri. Spingendo invece più oltre la ricerca, si trova che per tre ragioni le due medie altezze sono differenti e non possono essere confuse tra loro :

a) Perchè la media altezza di volume non s'ottiene come quella lineare addizionando le medie altezze delle vette e delle selle e dividendo a metà.

b) Perchè riducendo le vette ad uguale media altezza il volume totale della catena è cangiato.

c) Perchè lo stesso avviene riducendo ad uguale media altezza le selle.

5. Dimostriamo la prima proposizione:

È chiaro, che supponendo ridotte le vette e le selle ad uguale media altezza possiamo considerare la catena come formata di due parti.

I. Un tronco di piramide avente per altezza la media altezza delle selle, e per basi la base stessa della catena ed una sezione parallela condotta alla media altezza delle selle.

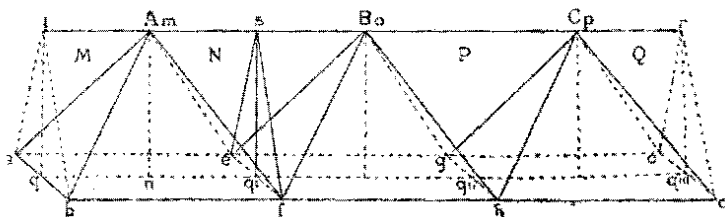
II. La somma delle piramidi d'uguale altezza corrispondenti alle vette.

Ora perchè la media altezza di volume fosse uguale alla media altezza *lineare*, bisognerebbe che in questa seconda parte il volume negativo delle selle fosse uguale al positivo delle vette.

La cosa apparirà chiarissima da una semplice figura.

Rappresentiamo nella figura 2 questa parte della catena, in cui le

FIG. 2 (z)



vette *A, B, C* e le selle *M, N, P, Q* sono ridotte ad uguale media altezza e sia il piano *abcd* la sezione parallela alla base condotta alla media altezza delle selle.

La media altezza lineare della catena è uguale alla distanza (altezza) della sezione *abcd* dalla base della catena, più metà dello scarto medio (altezza comune *mn* delle piramidi *A, B, C* sopra il piano delle selle).

Ma perchè, trasformate le piramidi *A, B, C* in un prisma di base rettangolare *abcd*, la sua altezza sia metà di *mn*, è necessario che il volume di esse piramidi sia metà d'un prisma di base *abcd* e d'altezza *mn*, che cioè la somma dei volumi negativi delle selle *M, N, P, Q* sia uguale alla positiva delle piramidi *A, B, C*. Ed è possibile questo?

Calcolando il volume delle vette o piramidi positive, p. e. di *A* si trova

$$A = \frac{ab \cdot qq' \cdot mn}{3}$$

essendo *ab, qq'* gli elementi della base, *mn* l'altezza. Da questa formula si ricava facilmente il volume totale delle piramidi positive

$$V = \frac{ab \cdot mn \cdot qq'''}{3}$$

Per determinare il volume delle selle p. e. di *N*, conduciamo per *fe*, che chiamerò larghezza ad asse della sella, un piano perpendicolare a *tr* (ovvero *mo*) e determiniamo il triangolo *sef* (2). Ora noi possiamo consi-

(1) In questa figura le lettere *m, s, p*, devono considerarsi come situato alla estremità superiore delle rispettive verticali insistenti sulla base della catena.

(2) Perchè un piano passante per una retta sia perpendicolare ad un'altra, bisogna che le due rette siano ad angolo retto fra loro, e non sempre l'asse d'una sella è perpendicolare alla lunghezza della catena. Ma noi possiamo sempre considerare piramidi che soddisfino alla condizione, perchè piramidi di base e d'altezza uguali sono equivalenti.

derare la sella N composta di due piramidi di base uguale (il triangolo esf) e aventi per altezza ms , so . Il volume totale della sella sarebbe dunque

$$N = \frac{esf. ms}{3} + \frac{esf. so}{3} = \frac{esf. mo}{3}$$

Osserviamo che l'altezza del triangolo esf è la stessa delle piramidi (mn) e che la base ef è uguale ad ab , onde

$$esf = \frac{ab. mn}{2}$$

e sostituendo nell'antecedente

$$N = \frac{ab. mn. \frac{mo}{2}}{3}$$

Da questa formula si ricava facilmente l'altra per il volume totale (V') delle piramidi negative M , N , P , Q .

$$V' = \frac{ab. mn. \frac{lr}{2}}{3}$$

Ora eguagliando V a V' abbiamo

$$\frac{ab. mn. qq'''}{3} = \frac{ab. mn. \frac{lr}{2}}{3}$$

dove è facile vedere come la condizione d'eguaglianza sia

$$qq''' = \frac{lr}{2} \text{ o che fa lo stesso } lr = 2 qq'''$$

Ciò vuol dire che i due volumi sarebbero eguali quando la somma delle lunghezze delle selle (distanze tra un vertice e l'altro delle vette) fosse doppia della lunghezza totale della catena.

Questo evidentemente è impossibile: il caso più favorevole, che neppure si riscontra in natura, è che la somma delle distanze sia pari alla lunghezza della catena, ciò quando i vertici delle vette fossero ridotti ad un punto. In questo caso più favorevole il volume totale delle selle è metà di quello delle vette e l'altezza media di volume della catena è uguale all'altezza media delle selle più $\frac{1}{4}$, (non $\frac{1}{2}$) dello scarto medio.

6. Consideriamo la seconda causa d'errore, cioè la differenza di volume indotta nella catena col ridurre le vette a media altezza comune.

Supponiamo sempre, per maggiore semplicità, la catena d'uniforme larghezza e chiamando l questa larghezza costante; a , a' , a'' . . . a^n le altezze

delle vette costituenti la catena; $b, b', b'', \dots b^n$ le lunghezze delle basi abbiamo

$$V = \frac{a \cdot b \cdot l}{3} \quad V' = \frac{a' \cdot b' \cdot l}{3} \quad V'' = \frac{a'' \cdot b'' \cdot l}{3} \quad \dots \quad V^n = \frac{a^n \cdot b^n \cdot l}{3}$$

e

$$V + V' + V'' + \dots V^n = \frac{a \cdot b \cdot l + a' \cdot b' \cdot l + a'' \cdot b'' \cdot l + \dots a^n \cdot b^n \cdot l}{3}$$

$$= \frac{l}{3} (a \cdot b + a' \cdot b' + a'' \cdot b'' + \dots a^n \cdot b^n)$$

Ora se $b, b', b'' \dots b^n$ fossero uguali, raccogliendo a fattor comune si avrebbe

$$V + V' + V'' + \dots V^n = \frac{l}{3} \cdot b (a + a' + a'' + \dots a^n) \text{ e}$$

moltiplicando e dividendo per n

$$V + V' + V'' + \dots V^n = \frac{l}{3} \cdot nb \cdot \frac{a + a' + a'' + \dots a^n}{n}$$

dove nb rappresenta la lunghezza totale della catena (di n vette);
 $\frac{a + a' + a'' + \dots a^n}{n}$ la media altezza.

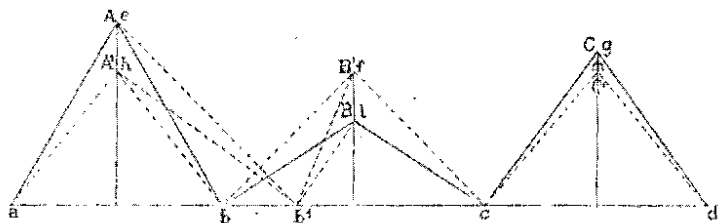
Ma questa supposta uguaglianza delle basi, lo avverte il Sonklar stesso, non si riscontra in natura e non è perciò possibile ottenere la formula indicata che pure egli accetta come generale.

Ciò si può anche mettere graficamente in tutta evidenza.

Siccome abbiamo già supposto la catena d'uniforme grandezza, per semplificare la figura si può considerare soltanto una sezione longitudinale di essa e le selle tutte ad uguale altezza.

Sia dunque questa sezione rappresentata nella figura 3; A, B, C siano

FIG. 3



tre vette a differente altezza, A', B', C' le tre vette a media altezza. Chiamamente appare

$$A' + B' + C' = A + B + C - aebh + bfcf - cgdg$$

Ma se le basi di A e di B invece che ab, bc fossero $ab', b'c$ la formula sarebbe

$$A + B + C = A + B + C - aeb'h + b'fel - cgd'm$$

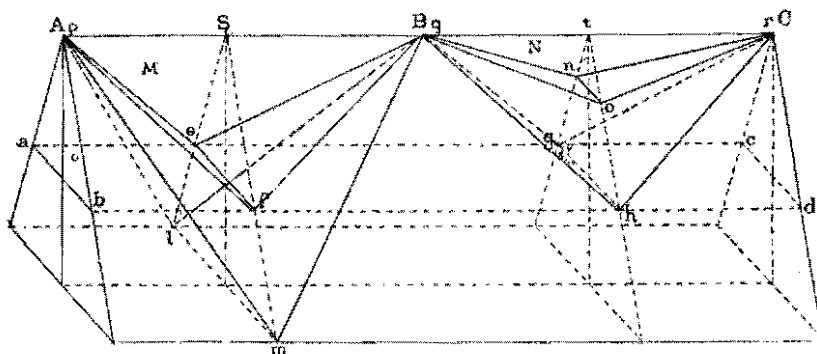
dove lo spazio in meno $aeb'h$ è maggiore di $aeb'h$, mentre lo spazio in più $b'fel$ è minore di $b'fel$.

Ciò dimostra che tra il volume delle vette a media altezza e quello delle vette quali sono in natura, non esiste un rapporto costante e i due volumi perciò non sono equivalenti.

7. Un po' più complicata è la figura per le selle.

Siano A, B, C (fig. 4) (1) tre vette d'uguale altezza; M, N , due selle la cui media altezza è segnata dal piano $abcd$.

FIG. 4



È facile vedere che, chiamando V il volume delle vette naturali e V' quello delle vette quando le selle siano ridotte a media altezza,

$$V = V' - (peflm + qeflm) + (qgnoh + rgnoh).$$

Ora essendo il piano del triangolo slm perpendicolare a ps (vedi nota 2, pag. 868), il volume della piramide $peflm$ si calcola facilmente

$$peflm = \frac{eflm \cdot ps}{3}$$

Così:

$$qeflm = \frac{eflm \cdot qs}{3}$$

e la somma

$$peflm + qeflm = \frac{eflm \cdot (ps + qs)}{3} = \frac{eflm \cdot pq}{3}$$

Parimenti si trova

$$qgnoh + rgnoh = \frac{gnoh \cdot gr}{3}$$

(1) In questa figura la lettera S dev' essere corretta in s , e la linea punteggiata bd deve riguardarsi come continua, perchè tutta visibile.

Sostituendo nella precedente eguaglianza abbiamo

$$V = V' - \frac{eflm \cdot pq}{3} + \frac{nogh \cdot qr}{3}$$

da cui appare che V sarà uguale a V' quando sia

$$eflm \cdot pq = nogh \cdot qr$$

Esaminiamo i due fattori $eflm$ ed $nogh$.

Sono due trapezi che hanno eguale una base ($ef = gh$) ed eguale nel nostro caso anche l'altezza: ma l'altra base (lm, no) disuguale, perchè quanto è più alta la sella tanto minore è la sua larghezza od asse; quanto maggiore è la sua differenza d'altezza, maggiore è la differenza degli assi. Perciò il trapezio sopra il piano di media altezza delle selle ($nogh$) delle piramidi da aggiungere non è equivalente al trapezio $eflm$ delle piramidi da togliere (1).

Quanto ai secondi fattori pq, qr , rappresentano essi le lunghezze delle selle, cioè le distanze da un vertice all'altro, ed è chiaro che non possiamo per nessuna ragione ritenerle sempre eguali tra loro: e neppure che compensino alla differenza dei trapezi in modo proporzionale, perchè non obbediscono ad alcuna legge, non hanno alcun rapporto men che vago ed incertissimo cogli altri elementi delle selle (altezza o profondità e larghezze od asse). Per tutto ciò non possiamo accettare come formula generale l'eguaglianza

$$eflm \cdot pq = nogh \cdot qr$$

e di conseguenza neppure l'altra

$$V = V'$$

Ciò dovevamo appunto dimostrare, che riducendo le selle ad eguale media altezza il volume della catena è alterato.

8. Consideriamo ora nella figura 5 la differenza di volume nella catena quando si riducono simultaneamente a media altezza le vette e le selle.

Siano A, B, C , tre vette: A', B', C' le stesse ridotte a media altezza. Siano poi M, N, Q tre selle (2), la cui media altezza è segnata dal piano $d'd'f'g'h'h'$.

Dalla figura appare

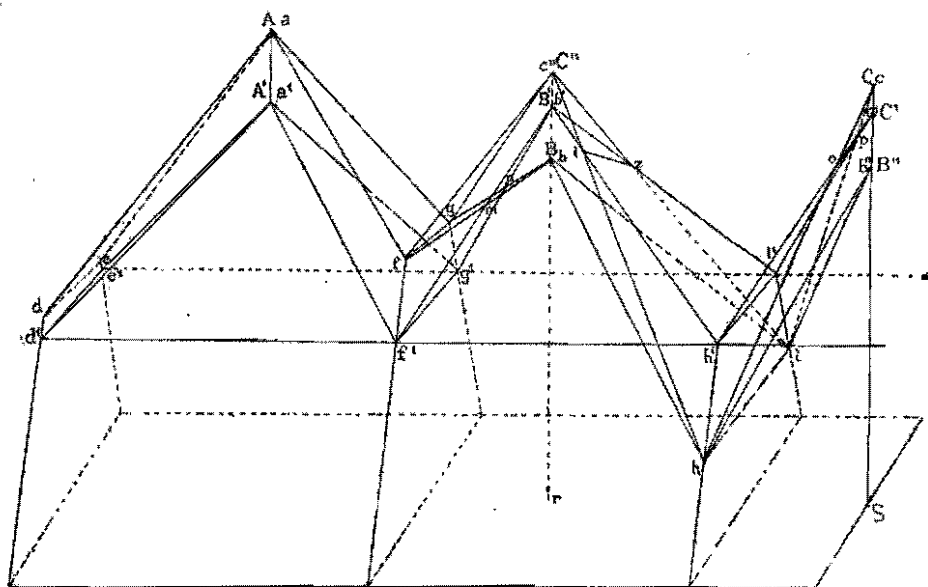
$$\text{I) } A + B + C = A' + B' + C' + \text{prisma triangolare } a d e d' e' d' + \\ + \text{pris. } a g f d' f' g' + \text{pris. } f f' m g g' n - \text{piramide}$$

(1) Le altezze dei trapezi nel caso nostro sono eguali, perchè le selle non sono che due: se fossero di più le altezze non sarebbero eguali, ma aritmeticamente proporzionali; cioè le a. dei trapezi sopra la m. a. delle selle (delle piramidi da aggiungere) sommerebbero quanto le a. dei trapezi sotto la m. a. (delle piramidi da togliere). Non è dunque possibile che la differenza d'a. compensi la differenza delle basi non eguali, le quali nei trapezi sopra la m. a. sono sempre minori, nei trapezi sotto la m. a. sempre maggiori della base eguale.

(2) La sella M sta a sinistra della vetta A, la sella N trovasi fra le vette A e B e la sella Q fra le vette B e C.

$b m n b' - \text{pris. } b' h' l h l b - \text{pris. } o h' h p l l + \text{piramide } l' c o p.$

FIG. 5



Calcolando ora il volume di queste piramidi e di questi prismi si viene, ma con una formula noiosa e lunghissima, a provare che i termini positivi non eguagliano i negativi in modo da elidersi e che perciò non è se non in qualche caso speciale e per eccezione

$$A + B + C = A' + B' + C'.$$

Ma allo stesso risultato si giunge anche in un modo più semplice ed evidente.

Consideriamo solamente spostate le due vette B e C restando tutti gli altri elementi invariati per modo che le medie altezze delle vette e delle selle non sono per nulla alterate: chiamiamo C'' e B'' le vette B e C così spostate.

Vediamo essere

$$\begin{aligned} \text{II) } A + C'' + B'' = & A + B' + C' + \text{prisma } a d e d' e' d' + \text{prisma } a g f d' g' f' \\ & + \text{prisma } c' f g f' g' b' + \text{piramide } b' c'' t z - \\ & - \text{prisma } t h h' z l l' - \text{prisma } c' h' l h l b''. \end{aligned}$$

Ora nei secondi membri delle eguaglianze I) e II) noi troviamo che i volumi positivi della I (prisma $a d e d' e' d' + \text{prisma } a g f d' g' f' + \text{prisma } f f' m g g' n + \text{piramide } l' c a p$) danno una somma minore dei volumi positivi della II (prisma $a d e d' e' d' + \text{prisma } a g f g' f' d' + \text{prisma } c' f g f' g' b' + \text{piramide } b' c'' t z$).

Infatti il prisma $g'g'nff'm$ della I) è una parte del prisma $c'fg'f'g'b'$ della II) e la piramide $c'c'op$ della I) si dimostra minore della piramide $b't's$ della II) (1).

D'altra parte i volumi negativi nel secondo membro della uguaglianza I) (prisma $b'm'n'b' +$ prisma $b'h'l'b'l'h +$ prisma $o'h'h'p'l'l$) danno una somma maggiore dei volumi negativi nel secondo membro della II) (prisma $t'h'h'z'l'l +$ prisma $c'h'l'h'l'b''$).

Infatti il prisma

$$b'h'l'h'l'b = \text{prisma } t'h'h'z'l'l' + \text{piramide tronca } b't'z'b'h'l;$$

e il prisma

$$c'h'l'h'l'b'' = \text{prisma } t'h'h'z'l'l' + \text{piramide tronca } c'op'h'l'b''.$$

Dunque i prismi $t'h'h'z'l'l'$, $o'h'h'p'l'l'$ sono comuni mentre la piramide tronca $c'c'op'h'l'b''$ si dimostra minore della piramide tronca $b't'z'b'h'l$.

Il secondo membro della uguaglianza I) è dunque minore del secondo membro della II) con tanta maggior ragione che non abbiamo neppure considerato la piramide negativa $b'm'n'b'$. Neppure dunque i primi membri delle due uguaglianze, $A + B + C$, $A + B'' + C''$ sono uguali fra loro.

E tuttavia ridotte le selle e le vette a media altezza tanto alla catena composta delle vette A, B, C , quanto all'altra delle vette A, C'', B'' corrisponde la stessa catena media composta delle vette A', B', C' ,

Resta pertanto dimostrato che la *media altezza lineare* d'una catena è ben differente dall'*altezza media di volume*, la quale si otterrebbe *addizionando l'altezza media delle selle con $3/4$ dello scarto medio, se riducendo le vette e le selle a media altezza non venisse modificato il volume della catena stessa.*

(1) Per non intralciare il ragionamento e complicare la figura non abbiamo riportato il calcolo, di cui indichiamo soltanto il metodo per chi voglia eseguirlo.

Essendo dunque i punti b', c' ad uguale altezza e il piano del trapezio $h'l'h'l'$ più vicino alla perpendicolare alla base (altezza della vetta C) cs che alla br della vetta B

$$b'h' > h'c'.$$

Costruendo ora dei triangoli simili coll'abbassare delle perpendicolari da b', c' sopra la $h'l'$ (altezze dei triangoli $b'h'l', c'h'l'$) e da c'' sopra la $h'l$ (altezze dei triangoli $c''h'l, c'h'l$) si trova

$$\frac{b't}{b'h'} = \frac{b'c''}{\text{altez. del trapezio } h'l'h'l'} \text{ e } \frac{c'o}{c'h'} = \frac{c'c'}{\text{altez. del trapezio } h'l'h'l'}$$

Ma essendo $b'c'' = c'c'$ e l'altezza del trapezio $h'l'h'l'$ la stessa è, $\frac{b't}{b'h'} = \frac{c'o}{c'h'}$; e finalmente es-

sendo $b'h' > h'c'$ anche $b't > c'o$.

Così è $b's > c'p$ e si prova in modo analogo $ts > op$; $c''t > co$; $c''s > cp$; mentre $b'c''$ è uguale a $c'c'$ per costruzione. Tutte le facce ($b'tz, b'sc'', b'tc'', c''tz$) della piramide $c''b'tz$ sono dunque maggiori delle rispettive facce della piramide $c'c'op$; e la prima piramide è maggiore della seconda.

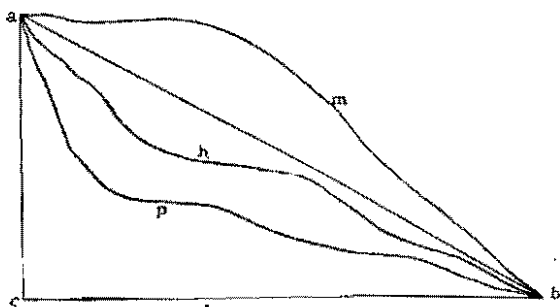
In modo simile si prova anche essere il tronco di piramide $b'tz'b'h'l$ maggiore del tronco di piramide $c'op'b''h'l$, provando che tutte le facce del primo sono maggiori delle rispettive facce del secondo.

9. Ed è chiaro che non può aver valore la supposizione che si compensino tra loro gli errori in più e quelli in meno. Se tale compenso in qualche caso speciale può verificarsi, sarebbe più che una imprudenza verso la scienza l'ammetterlo senz'altro in tesi generale.

Ed è per questa ragione medesima che a me pare di non potere accettare neppure l'angolo medio d'inclinazione come è dato dalla formola 5). E se ammise il Sonklar che non basta conoscere la differenza di livello fra la testa e il piede d'una valle per avere idea del procedere di essa, della sua inclinazione e per calcolare la media altezza (pag. 186); mi meraviglio poi che abbia tanto facilmente concluso, essere dato l'angolo di inclinazione dalla differenza d'altezza di un punto sul monte, di un punto a valle, e dalla loro distanza orizzontale.

Che abbia anche l'angolo calcolato a tal modo un valore, non si può negarlo; ma non quale vorrebbe il Sonklar e l'averlo introdotto nella formola 9) per determinare il volume della catena porta in esso nuova ragione d'errore. Basta gettare un'occhiata sulla figura 6 per vedere come

FIG. 6



i dossi montuosi amb , and , apb abbiano teoricamente e secondo la formola 5) lo stesso angolo d'inclinazione abc , il quale perciò non può essere accettato come valore reale di nessuno di essi, tanto più che secondo il Sonklar si può determinarlo senza aver visto il monte e col solo mezzo di una carta che per quanto buona, se non è condotta col sistema delle linee equidistanti parallele, non può far vedere il reale procedere del pendio.

Tocca all'*Orogenia* studiare le cause di queste diverse curve montuose e determinare anche quali formazioni geologiche abbiano di preferenza l'una o l'altra: noi osserviamo soltanto che, può darsi talora che nella lunghezza d'una catena le curve sollevate oltre l'ipotenusa del medio angolo di inclinazione considerato, si compensino con le curve depresse: ma, ripetiamo, i casi speciali non si possono in un calcolo rigoroso scientifico accettare come regola generale.

Da tutto quello che siamo venuti fin qui esponendo apparisce quanto

inesatta sia la formula 9), la quale tuttavia è la principale e più importante, ch'era forse lo scopo precipuo dello studio del Sonklar, perchè delle altre formule parte concorrono a formarla e parte non ne sono che conseguenze.

10. Ed ora volendo esaminare in modo sintetico e generale l'opera dell'illustre geografo, facilmente si vede, che per lo più le cause d'errore sono dovute al metodo.

Sarebbe grande errore sperare e pretendere anche nelle questioni orometriche, come in molte altre, risultati minuziosamente esatti. È certo che dobbiamo accontentarci di calcoli approssimativi e che bastano questi e giovano talora a condurre a conclusioni generali e importanti anche più di quelli ottenuti con minuta precisione: la soverchia cura della esattezza e dei particolari può anzi alle volte traviare il giudizio e allontanarlo dal punto principale. Non accuso dunque il Sonklar perchè non vuol misurare i monti a palmo a palmo fino all'ultima rupe, fino all'ultimo solco che un torrente alpino abbia scavato e come farebbe un architetto d'un palazzo e d'un edificio artistico; ma a me pare che egli abbia troppo teoricamente considerato le questioni orometriche. Ha ragionato delle catene prescindendo da tutte le modificazioni accidentali e guardando solo alla forma fondamentale; ha determinato le formule come su dei prismi triangolari. Eppure chi per poco ha pratica dei monti sa quanto profondamente le accidentalità del suolo modificano la forma fondamentale e come anche questa sia ben raramente quell'unica, che il Sonklar ha considerato. Varie e numerose sono invece le forme geometriche, che modificate dall'origine o per cause atmosferiche e successive, possono però considerarsi come fondamentali e tipiche non solo di singoli monti, ma anche di catene e di sistemi.

Le cifre calcolate dal Sonklar e dagli altri pochi che le sue formule adottarono per determinare il volume di qualche speciale sistema montuoso non hanno maggior valore di quelle approssimative che l'Humboldt, con migliore materiale di misure ipsometriche, avrebbe potuto trovare. Ed è in ciò che, lasciando gli errori di fatto, il Sonklar s'illude; egli crede che i dati ottenuti con le sue formule abbiano un assai maggior valore. E se finora, malgrado che tanto sia cresciuto e vada crescendo questo materiale, solo pochissimi si siano occupati dell'orometria ed abbiano adoperato le formule del Sonklar, dubito quasi che dipenda da una certa diffidenza contro di esse e contro il metodo generale, che più di qualcuno ha forse per istinto provato, sebbene non curasse indagarne le ragioni.

Per me io credo che, restando sempre, giova ripeterlo, come principio fondamentale che si deve rifuggire dai calcoli troppo minuti, è pos-

sibile però ottenere un complesso di dati largamente approssimativi, sui quali la scienza possa veramente contare; ma, per ottener questi, credo che si debba rinunciare a certe formule puramente teoriche e generali ed alla speranza di acquistarli in breve tempo e con facilità. Al modo stesso che per determinare l'altezza di un monte dobbiamo salirvi o portarci almeno sul luogo per usare le formule trigonometriche suggerite dalla topografia, credo non si debba far meno per un calcolo tanto più difficile e complesso com'è il volume.

Ogni monte, anzi talora tutto un gruppo, una catena, si possono ridurre a forme geometriche generali facilmente misurabili; ma qual sia la figura, la forma in ogni singolo caso non si può giudicare che sul luogo. Parmi che d'ora innanzi un nuovo campo si deva schiudere agli studiosi dei monti ed agli arditi alpinisti: non devono più accontentarsi della gloria, talora ottenuta con grandi sofferenze ed a rischio della vita, d'aver determinato l'altezza d'una vetta; devono anche cercare di calcolare il volume del monte che studiano od anche d'una sola parte di esso: tutto ciò che è positivamente con esattezza determinato è tutto guadagno per la scienza. E in questa speciale determinazione potranno essere anche utili le formule del Sonklar, benchè io creda che soltanto con l'esperienza si possa trovare quali siano le forme geometriche fondamentali più comuni dei monti e delle catene e un certo complesso di formule che rendano più facile la misurazione e possano essere adoperate anche dai meno esperti e per sola pratica. Certamente in questo modo non possiamo sperare di conoscere troppo presto il volume dei sistemi montuosi della terra; ma quale cultore della scienza può anteporre a pochi e sicuri dati anche un numero assai maggiore di cifre che deve sempre aspettare di veder alterate e smentite!

Nè sempre è necessario, per determinare il volume d'un sistema, trovarsi sul luogo. Quando si abbia la fortuna che il paese sia stato misurato trigonometricamente e rappresentato col sistema delle linee orizzontali equidistanti, il calcolo si può fare con la massima esattezza con l'uso del planimetro e sulla carta geografica.

Concludendo io dico, che troppo s'è finora trascurato lo studio orometrico dei sistemi montuosi. L'ipsografia conta già ricco materiale, che va d'anno in anno aumentando, mentre per l'orometria tutto è nuovo, non potendosi accettare senza diffidenza neanche le cifre calcolate dal Sonklar e dal Supan. Eppure se nessuno mette più in dubbio l'importanza del conoscere l'altezza assoluta dei monti, si dovrebbe riconoscere quanto maggiore ne abbia la conoscenza del volume, la quale non si può dire quanto potrebbe giovare alla geologia ed agli altri rami della scienza e quali nuovi e inaspettati campi di studio e di ricerche potrebbe aprire.

Frattanto per cominciare io stesso a dare l'esempio di siffatti calcoli, pubblicherò fra breve il risultato delle misure che vo facendo sul volume del sistema delle Murge e del promontorio del Gargano, che il chiarissimo geologo Pugliese, cav. Cosimo De Giorgi, a ragione sostiene doversi chiamare sistema Apulo-Garganico.

E per questi calcoli mi gioverò delle tavolette topografiche nella scala di 1: 50,000 pubblicate dal R. Istituto Geografico Militare di Firenze per servire alla grande Carta del Regno d'Italia in iscala di 1: 100,000.