

G — LE PROJEZIONI QUANTITATIVE ED EQUIVALENTI DELLA CARTOGRAFIA.

del Socio M. FIORINI, professore all'Università di Bologna.

I.

§ 1. Definizioni, nozioni e formole che riguardano le proiezioni quantitative ed equivalenti. — § 2. Equazioni generali di siffatte proiezioni.

§ 1. Nella rappresentazione della superficie terrestre sopra un piano è impossibile la conservazione delle lunghezze di tutte le linee rappresentate sendo che la superficie della sfera o dello sferoide non è sviluppabile in piano. Ma, all'incontro, è dato serbare o gli angoli o le aree della figura rappresentata; nel primo caso si ha un genere di proiezioni dette da alcuni ortomorfe (3), da altri conformi (4), dal TISSOT autogonali (5),

(1) COMBER e GRENFELL, *Proceed. cit.*, 1885, pag. 368.

(2) JOHNSTON, *The river Congo* ecc., cap. VIII, pag. 211, cap. XVI, pagg. 419-21; STANLEY, *The Congo* ecc., vol. II, cap. XXVIII, pagg. 100-01; VON FRANÇOIS, *Verhandl. cit.*, 1886, pag. 154; OPPER A., *Der Kongo* ecc., pag. 111.

(3) Così il D'AVEZAC nel *Coup d'oeil historique sur la projection des cartes de géographie*. Parigi 1863, estratto dal *Bull. de la Soc. de Geog.*, aprile, maggio e giugno 1863; così il GERMAIN nel *Traité des projections des cartes géographiques*. Parigi; così altri autori.

(4) Ci limitiamo a citare il GRETSCHEL, *Lehrbuch der Karten-Projektion*, Weimar 1873, l'HERZ, *Lehrbuch der Landkarten projektionen*, Lipsia 1885, il PUCCI, *Fondamenti di Geodesia*. Vol. 2°, Milano, 1887.

(5) *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques par M. A. TISSOT*. Parigi, 1881.

da noi isogoniche (1), le quali, dotate di cospicue proprietà, hanno pure quella precipua di avere l'immagine simile, nelle parti infinitesime, all'obbietto; nel secondo si ha l'altro delle proiezioni dette equivalenti che alla volta loro godono di non poco eccellenti proprietà e che, per essere il rapporto delle aree della rappresentazione uguale al rapporto delle aree della figura rappresentata, riescono cotanto utili ai cultori della statistica e della geografia fisica. Nelle une e nelle altre proiezioni sono alterate le lunghezze delle varie linee; nelle prime gli angoli e quindi le forme elementari non soffrono detrimento, ma ad alterazioni soggiacciono le aree; nelle seconde queste restano bensì immutate, ma si alterano gli angoli e con essi le elementari configurazioni.

Quantunque di ambi i sistemi di proiezione siasi già da noi trattato (2), tuttavia qui vogliamo tornare, in parte, sulle proiezioni equivalenti, sia per chiarire meglio alcuni punti, sia per recarvi importanti aggiunte, rimandando bene spesso il lettore a quanto fu detto altrove. E siccome le proiezioni equivalenti sono un caso particolare delle rappresentazioni che hanno la proprietà di avere le aree in rapporto costante colle aree obbiettive e che dai noi furono dette quantitative, così queste comprendiamo nella nostra trattazione. Ma anzi tutto è opportuno ricordare alcune formole e proposizioni di cui avremo bisogno e che trovansi nel citato nostro libro, o si possono facilmente dedurre da quelle che vi sono contenute.

Nel capitolo I della nominata opera sono le formole che valgono a trovare, nel caso della rappresentazione di una superficie sopra un'altra, ed in particolare, dello sferoide o della sfera terrestre sopra un piano, i moduli lineari, ossia i rapporti amplificativi delle grandezze lineari elementari, come pure i loro valori massimo e minimo che si verificano in ciascun punto e che diconsi moduli principali, e le direzioni loro competenti, a cui si dà anche l'appellativo di principali e che fra tutte le direzioni ortogonali sono le uniche aventi la proprietà di tagliarsi ad angolo retto tanto nella superficie obbiettiva quanto nella rappresentazione. E vi sono altresì le formole che danno l'angolo del meridiano col parallelo, non più retto, in generale, nella rappresentazione, l'errore sopportato dall'angolo soggetto alla massima deformazione, le direzioni dei lati di questo angolo che sono quelle di massima deviazione dalle direzioni principali, ed il modulo angolare ossia il modulo di deformazione.

Venendo al caso nostro delle proiezioni quantitative e dicendo m , e

(1) *Le proiezioni delle carte geografiche* per MATTEO FIORINI. Bologna 1881.

(2) Vedi *Le proiezioni delle carte geografiche* e le due Note *Sopra la proiezione cartografica isogonica* estratte dalla Serie IV, Tomi III e IV delle *Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna* 1882 e 1883.

m_2 i moduli principali, m' e m'' i moduli del meridiano e del parallelo, I l'angolo che questi fanno fra loro sulla carta, μ^2 il costante modulo superficiale, ossia il costante rapporto d'amplificazione delle aree, si ha

$$m_1 m_2 = m' m'' \text{ sen } I = \mu^2,$$

che, nel caso della proiezione equivalente, ossia di $\mu^2 = 1$, significa essere fra loro reciproci i due moduli principali e dà

$$m' m'' \text{ sen } I = 1.$$

E si ha che per ciascun punto passano due curve che nella rappresentazione hanno gli archi amplificati nel rapporto costante di $\mu:1$ e che sono linee isoperimetre quando la proiezione è equivalente. Le quali curve formano l'angolo soggetto alla massima alterazione e coincidono colle linee di massima deviazione dalle direzioni principali.

Altre proprietà della proiezione quantitativa sono che il modulo m della direzione i cui angoli azzimuttali obbiettivo e subbiettivo sono ω e Ω (1) è dato da

$$m^2 = m'^2 \cos \omega + \mu^2 \cot I \text{ sen } 2\omega + m''^2 \text{ sen}^2 \omega,$$

od anche da

$$m = \frac{\mu^2}{m'} \frac{\text{sen } \omega}{\text{sen } \Omega},$$

che fra i detti angoli esiste la relazione

$$\cot \Omega = \cot I + \frac{m'^2}{\mu^2} \cot \omega,$$

che i moduli principali si hanno dall'equazione

$$m^4 - (m'^2 + m''^2) m^2 + \mu^4 = 0,$$

oppure fatto,

$$\tan \beta = \frac{m'}{m''} = \frac{\mu^2}{m'^2 \text{ sen } I} = \frac{m'^2 \text{ sen } I}{\mu^2}$$

e

$$\text{sen } 2\gamma = \text{sen } 2\beta \text{ sen } I,$$

da

$$m_1 = \mu \sqrt{\tan \gamma}, \quad m_2 = \mu \sqrt{\cot \gamma},$$

che gli azzimutti obbiettivo e subbiettivo delle due direzioni principali ricavansi da

$$\tan 2\omega = \frac{2\mu^2 \cot I}{m'^2 - m''^2},$$

$$\tan 2\Omega = \frac{2\mu^4 \cot I}{m'^4 + \mu^4 (\cot^2 I - 1)},$$

(1) Angolo azzimuttale è l'angolo di una data direzione col meridiano. Tale angolo oggidì ha anche nome di azzimutto, mentre con tale voce anticamente designavasi un piano condotto per la verticale di un dato luogo.

od anche da

$$\tan \omega = \sqrt{\frac{m_1^2 - m'^2}{m'^2 - m_2^2}},$$

$$\tan \Omega = \frac{m^2}{m_1} \tan \omega,$$

nelle quali due ultime espressioni s'intende che ω e Ω sono gli azzimutti obbiettivo e subbiettivo della direzione principale di modulo m_1 . Se la proiezione è equivalente, le precedenti formole, per essere $\mu^2 = 1$, restano alquanto semplificate.

Quando, nella rappresentazione quantitativa, i meridiani ed i paralleli si tagliano ad angolo retto, e perciò coincidono colle direzioni principali ed i loro moduli m' e m'' s'identificano coi moduli principali m_1 e m_2 , le curve i cui archi sono amplificati nel rapporto costante di $\mu:1$ e che sono le linee di massima deviazione azimuttale hanno per equazione

$$\frac{dt}{dl} = \frac{r_1}{r_2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}},$$

dove l e t indicano la latitudine e la longitudine e r_1 e r_2 i raggi di curvatura del meridiano e del parallelo dell'elissoide terrestre espressi da

$$r_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}, \quad r_2 = \frac{a \cos l}{(1-e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}},$$

essendo a il semiasse equatoriale, b il polare e l'eccentricità e data da $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Se la proiezione è equivalente, l'equazione delle linee di

massima deviazione azimuttale, che sono isoperimetre, è

$$\frac{dt}{dl} = \frac{m_1 r_1}{r_2},$$

od anche

$$\frac{dt}{dl} = \frac{r_1}{m_2 r_2}.$$

§ 2. Dette X e Y le coordinate rettangolari del punto che nella proiezione rappresenta il punto obbiettivo di coordinate geografiche l e t , l'equazione generale delle proiezioni quantitative è

$$(1) \quad \frac{dX}{dl} \frac{dY}{dt} - \frac{dX}{dt} \frac{dY}{dl} = \mu^2 r_1 r_2.$$

La quale, introducendo le coordinate polari e dicendo ρ il raggio vettore e v l'ascissa angolare, si cambia in

$$(2) \quad \rho \left(\frac{d\rho}{dl} \frac{dv}{dt} - \frac{d\rho}{dt} \frac{dv}{dl} \right) = \mu^2 r_1 r_2.$$

Siccome nelle nostre ricerche occorrerà l'integrazione di $r_1 r_2 dl$, così notiamo che si ha

$$\int_0^l r_1 r_2 dl = \frac{a^2(1-e^2)}{2} \left[\frac{\sin l}{1-e^2 \sin^2 l} + \frac{1}{2e} \log \frac{1+e \sin l}{1-e \sin l} \right]$$

e che, introducendo, in luogo della latitudine l , la colatitudine u , è

$$\int_0^u r_1 r_2 du = \frac{a^2(1-e^2)}{2} \left[\frac{1}{1-e^2} - \frac{\cos u}{1-e^2 \cos^2 u} + \frac{1}{2e} \log \frac{(1+e)(1-e \cos u)}{(1-e)(1+e \cos u)} \right].$$

Le quali formole, svolte in serie secondo le potenze di e ed arrestate ai termini di 4° ordine, divengono

$$\int_0^l r_1 r_2 dl = a^2(1-e^2) \left(\sin l + \frac{2e^2}{3} \sin^3 l + \frac{3e^4}{5} \sin^5 l \right),$$

$$\int_0^u r_1 r_2 du = a^2(1-e^2) \left[1 - \cos u + \frac{2e^2}{3} (1 - \cos^3 u) + \frac{3e^4}{5} (1 - \cos^5 u) \right],$$

e che si potrebbero scrivere anche più semplicemente osservando che è

$$a^2(1-e^2) = b^2.$$

Come ad esprimere le X e Y , ovvero le ρ e v in funzione della latitudine e della longitudine si ha la sola equazione (1), ovvero la sola (2), così richiedesi che sia aggiunta qualche condizione esprimibile per mezzo di una sola equazione. Ciò si può fare assumendo arbitrariamente la funzione di l e t che esprime una delle coordinate X e Y , ovvero una delle ρ e v . Che anzi per amore di semplicità cominceremo dal considerare il caso in cui una delle coordinate, la X ovvero la ρ , sia funzione soltanto della latitudine; e ciò si avvera quando i paralleli sono rappresentati da rette parallele, ovvero da archi circolari concentrici.

II.

Proiezioni a paralleli circolari concentrici.

§ 3. Proprietà e formole generali. — § 4. Proiezioni coniche. — § 5. Proiezioni polari; proiezioni azimuttali. — § 6. Proiezioni coniche azimuttali. — § 7. Proiezione in cui le distanze dei paralleli sono proporzionali ai loro intervalli sulla superficie obbiettiva. — § 8. Semplificazione della proiezione precedente rendendola equivalente e facendo le distanze dei paralleli uguali agli intervalli obbiettivi. — § 9. Proiezioni cordiformi. — § 10. Proiezione di TOLOMEO a meridiani curvilinei modificata e resa equivalente dal MERCATORE. — § 11. Proiezione del BONNE. — § 12. Proiezione a meridiani uguali fra loro. — § 13. Si ritrova la proiezione conica. — § 14. Proiezione anulare della sfera a semimeridiani circolari. — § 15. Proiezione anulare in cui le dilatazioni lineari sono nulle sopra due dati paralleli. — § 16. Proiezione anulare del WIECHEL in cui ad una data colatitudine sono conservati i gradi di longitudine ed i meridiani incontrano il parallelo ad angolo retto. — § 17. Proiezione anulare in cui i paralleli sono rappresentati da intiere circonferenze. — § 18. Proiezione anulare col centro della proiezione nel polo. — § 19. Proiezione anulare cambiata in polare. Applicazioni del WIECHEL e del PANIGHETTI.

§ 3 Nel caso in cui la proiezione quantitativa debba avere i paralleli segnati da archi circolari concentrici, stabilito un sistema di coordinate

polari ρ e v , posta al comun centro de' nominati circoli l'origine dei raggi vettori ρ , sarà ρ funzione soltanto della latitudine l , o, se vuolsi, della colatitudine u , si avrà cioè

$$(3) \rho = \rho(u).$$

Dalla (2), il cui 2° membro, per maggiore generalità, deve intendersi preceduto dal doppio segno $\pm$, si ha

$$\rho \frac{d\rho}{du} \frac{dv}{dt} = \mu^2 r_1 r_2$$

e quindi

$$(4) v = \frac{\mu^2 r_1 r_2 du}{\rho d\rho} t + \varphi(u).$$

La v , dunque, è una funzione lineare di t , essendo φ una funzione arbitraria che proviene dall'integrazione, che si determina mediante la conoscenza della curva secondo la quale si proietta un dato meridiano e che esprime la v rispondente al meridiano iniziale. Se questo si proietta secondo una linea retta e si assume come origine delle ascisse angolari v , si ha $\varphi(u) = 0$ e rimane così semplificata la (4).

Le (3) e (4) esprimono le coordinate polari in funzione delle geografiche. Data l'una equazione si trova l'altra. La (3) è l'equazione dei paralleli; quella dei meridiani si ottiene eliminando la u fra le (3) e le (4) e risulta della forma

$$(5) v = \mu^2 t \psi(\rho) + \theta(\rho).$$

E però, data la legge di distribuzione dei paralleli, si deduce la (5), ossia l'equazione dei meridiani. Parimente, se è data la legge di rappresentazione dei meridiani, vengono ad essere note le funzioni ψ e θ ; per il che dalla (4) si ha

$$\frac{r_1 r_2 du}{\rho d\rho} = \psi(\rho),$$

che fa conoscere ρ in funzione di u , ossia la legge di distribuzione dei paralleli, e, se in $\theta(\rho)$ si pone in luogo di ρ la rispondente funzione di u , si trova la $\varphi(u)$, avvertendo che è $\theta(\rho) = 0$ quando il meridiano iniziale si proietta secondo una linea retta coincidente colla origine delle v .

Considerando sul parallelo u i punti di longitudine t e t' e dicendone, in proiezione, v e v' le ascisse angolari, si ha

$$\rho(v - v') = \frac{\mu^2 r_1 du}{d\rho} r_2 (t - t').$$

Ciò è dire che gli archi di un dato parallelo sono proporzionali agli archi obbiettivi, che per ciascun parallelo i gradi di longitudine sono, sulla

carta, fra loro uguali come lo sono sullo sferoide, che il modulo lineare competentegli è costante ed uguale a $\frac{\rho(v-v')}{r_2(t-t')}$, ossia a $\frac{\mu^2 r_1 du}{d\rho}$. E deducesi

che, note le proiezioni di due dati meridiani, se si dividono in parti proporzionali i vari archi dei paralleli fra questi compresi, le linee congiungenti i loro punti di uguale divisione sono altrettanti meridiani. Così, se sono tracciati i meridiani di longitudine t e t' , descritti gli archi circolari concentrici rappresentanti i paralleli, divise le loro porzioni comprese fra quei due meridiani in tante parti uguali quanti sono i gradi contenuti in $t-t'$, le linee che ne congiungono i punti di uguale divisione vengono ad essere, di grado in grado, i vari meridiani compresi fra i due dati, e, prolungate, oltre questi, le divisioni de' paralleli, le linee congiungenti i punti omonimi offrono i rimanenti meridiani. Proiettandosi il meridiano iniziale secondo una linea retta che s'intende essere l'origine delle v , il

modulo lineare spettante al parallelo u ed uguale a $\frac{\mu^2 r_1 du}{d\rho}$ riducesi a $\frac{\rho v}{r_2 t'}$

ed è chiaro che la conoscenza della linea secondo cui si proietta un dato meridiano è sufficiente al tracciamento di tutti le altre linee di longitudine.

L'angolo I fatto, in proiezione, dal meridiano col parallelo è espresso (1) da

$$\tan I = \frac{\frac{d\rho}{du}}{\rho \frac{dv}{du}};$$

e però, indicando con δ l'alterazione a cui soggiace il loro angolo obiettivo, ponendo cioè

$$\delta = \frac{\pi}{2} - I,$$

si ha

$$(6) \tan \delta = \cot I = \frac{\rho \frac{dv}{du}}{\frac{d\rho}{du}}$$

Il quale angolo δ misura l'inclinazione del meridiano sul prolungamento del raggio del parallelo.

I moduli m' e m'' del meridiano e del parallelo, osservando che pre-

(1) *Le proiezioni ecc.*, Cap. I, § 32.

cedentemente s'è detto quale sia il valore del modulo m'' e che si ha (1)
 $m' m'' \cos \delta = \mu^2$, sono espressi da

$$(7) \quad m' = \frac{1}{r_1 \cos \delta} \frac{d\rho}{du}, \quad m'' = \mu^2 r_1 \frac{du}{d\rho}$$

§ 4. Come esempio della ricerca della legge di distribuzione dei paralleli essendo nota la legge di rappresentazione dei meridiani, vogliasi che questi, in proiezione, sieno rettilinei e concorrenti nel comune centro di quelli. Assumendo come origine delle v la proiezione del primo meridiano, vengono ad essere nulle, nella (4), la $\varphi(u)$, nella (5), la $\theta(\rho)$, e dal coincidere dei meridiani coi raggi dei paralleli deducesi essere costante, nella (5), la $\psi(\rho)$; perciò, detto λ il prodotto di μ^2 per questa costante, si ha

$$v = \lambda t$$

che è l'equazione dei meridiani. Indi risulta

$$\lambda \rho d\rho = \mu^2 r_1 r_2 du,$$

e

$$\rho^2 = \frac{2\mu^2}{\lambda} \int r_1 r_2 du + \text{cost.},$$

che è l'equazione dei paralleli.

Per tale modo si hanno le formole generali della proiezione conica quantitativa, come pure della equivalente in rispondenza di $\mu^2 = 1$ (2). Di siffatte proiezioni avendo trattato distesamente nel citato libro, Cap. III, art. IV, qui ci limitiamo a discorrere di alcune questioni là non risolte, oppure non svolte in modo completo e riguardanti la proiezione conica equivalente. Eccone una importantissima.

Quale è la colatitudine u dove i valori dei moduli lineari principali sono l'uno massimo e l'altro minimo?

Applicando la regola dei massimi e minimi alle formole esprimenti i moduli m_1 e m_2 , che (loc. cit.) sono

$$m_1 = \frac{1}{m_2} = \frac{r_2}{\lambda \rho}$$

e che competono alle due direzioni principali, coincidenti coi meridiani e paralleli, si trova che il richiesto valore di u è dato da

$$r_2^2 - \lambda \rho^2 \cos u = 0$$

e che i rispondenti valori di m_1 e m_2 si ottengono da

$$m_1^2 = \frac{1}{m_2^2} = \frac{\cos u}{\lambda};$$

(1) *Id.* Cap. I, § 5.

(2) È bene ricordare che noi diciamo proiezioni coniche quelle rappresentazioni in cui i paralleli sono archi circolari concentrici ed i meridiani linee rette concorrenti nel loro comun centro e formanti angoli proporzionali alle loro differenze di longitudine. La proiezione conica si cambia in polare quando il comun centro dei paralleli coincide col polo ed è $\lambda = r$.

nel caso della sfera, detta c una certa costante di cui si disse nell'opera citata, cap. III, § 25, la u ricavasi da

$$\cos u + \frac{1}{\cos u} = c$$

Una questione che pure là avevamo risolta (1) era quella di determinare la costante dell'integrazione in guisa da far coincidere la proiezione del polo col centro dei paralleli, dal quale escono i meridiani. Considerando qui il solo caso della sfera, ricordiamo che l'espressione del raggio dei paralleli risulta

$$\rho = \frac{2a}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen} \frac{u}{2},$$

già riferita dal LAMBERT (2), che i moduli lineari m_1 e m_2 de' meridiani e paralleli, ossia i moduli principali, si hanno da

$$m_1 = \frac{1}{m_2} = \frac{\cos \frac{u}{2}}{\sqrt{\lambda}}$$

che l'equazione delle linee isoperimetre è

$$dt = \pm \frac{du}{2\sqrt{\lambda} \operatorname{sen} \frac{u}{2}}$$

ossia

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \log \tan \frac{u}{4} + \text{cost.}$$

La costante λ può assumersi arbitrariamente, ovvero determinarsi assoggettando la proiezione a qualche condizione particolare. Eccone alcuni esempi.

1° *Le alterazioni sono nulle alla colatitudine data u' .*

A soddisfare tale condizione richiedesi che, alla data colatitudine, sia

$$m_1 = m_2 = 1;$$

ciò dà

$$\lambda = \cos^2 \frac{u'}{2}.$$

Quindi è

$$\rho = 2a \frac{\operatorname{sen} \frac{u}{2}}{\cos \frac{u'}{2}}$$

(1) Op. cit., pag. 270, § 32.

(2) *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik*, Berlino 1772, Tom. 117, p. 187.

e

$$m_1 = \frac{1}{m_2} = \frac{\cos \frac{u}{2}}{\cos \frac{u'}{2}}.$$

La relazione fra l'angolo azzimutale obbiettivo φ e la sua proiezione Φ è

$$\frac{\tan \Phi}{\tan \varphi} = \frac{\cos^2 \frac{u'}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2}}.$$

Il modulo angolare esprime con

$$p = \frac{m_1}{m_2} = m_1^2 = \frac{\cos^2 \frac{u}{2}}{\cos^2 \frac{u'}{2}}.$$

ovvero con

$$p = \frac{m_2}{m_1} = m_2^2 = \frac{\cos^2 \frac{u'}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2}},$$

secondo che la colatitudine u è inferiore o superiore alla u' ; e l'errore 2ε dell'angolo più sformato ricavasi da

$$\tan \left(45^\circ + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \sqrt{p}$$

od anche da

$$\tan \frac{\varepsilon}{2} = \tan \frac{1}{4} (u' + u) \tan \frac{1}{4} (u' - u),$$

ovvero da

$$\tan \frac{\varepsilon}{2} = \tan \frac{1}{4} (u + u') \tan \frac{1}{4} (u - u'),$$

secondo che u è minore o maggiore di u' .

Però si ha che alla colatitudine u' sono nulle le alterazioni lineari ed angolari, che nella direzione del meridiano havvi dilatazione o contrazione secondo che dalla stessa colatitudine si procede verso il polo o verso l'equatore, che nella direzione del parallelo avviene l'opposto, che gli angoli azzimutali, nella zona compresa fra il parallelo u' ed il polo, diminuiscono o crescono secondo che sono acuti od ottusi, succedendo il contrario nel-

l'altra zona, che infine le alterazioni lineari ed angolari crescono a misura che ci allontaniamo dal parallelo u' .

Per ogni punto di colatitudine U e longitudine T passano due linee isoperimetre aventi per equazione

$$t - T = \pm \frac{1}{\cos \frac{u'}{2}} \log \frac{\tan \frac{u}{4}}{\tan \frac{U}{4}}.$$

Alla composizione della mappa giova prendere per unità il grado equatoriale, descrivere il parallelo u' col raggio $\rho' = \frac{360}{\pi} \tan \frac{u'}{2}$, dividerlo ne' suoi gradi di longitudine uguali a $\sin u'$, tirare i meridiani, ossia i raggi, agli ottenuti punti di divisione, infine descrivere i paralleli mediante

$$\text{circoli concentrici al precedente e di raggio } \rho = \frac{360}{\pi} \frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u'}{2}}.$$

Il LAMBERT (1) applicò tale proiezione alla carta dell'Europa. In luogo di porre $u' = 40^\circ$, che n'è, in numero tondo, la colatitudine media, fece, per amore di semplicità,

$$\cos u' = \frac{3}{4},$$

a cui rispondono

$$u' = 41^\circ. 25',$$

$$\lambda = \cos^2 \frac{u'}{2} = \frac{1 + \cos u'}{2} = \frac{7}{8} = 0,875.$$

$$u' = 60^\circ.$$

Chi ne faccia l'applicazione all'emisfero e ponga $u' = 60^\circ$ trova

$$\lambda = \frac{3}{4} = 0,75,$$

essendo così la rappresentazione della mezza sfera contenuta in un settore di 270° ; al polo si ha

$$m_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547, \quad m_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660,$$

$$p = \frac{4}{3}, \quad \sin \varepsilon = \frac{1}{7} \quad \text{e} \quad \varepsilon = 8^\circ. 13';$$

(1) Op. cit., pag. 188.

all'equatore è

$$m_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8165, \quad m_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,2247,$$

$$p = \frac{3}{2}, \quad \text{sen } \varepsilon = \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \varepsilon = 11^\circ.32'.$$

2°. *Le alterazioni angolari sono uguali alle colatitudini estreme u_1 e u_2 della zona.*

Considerando (vedi l'esempio precedente) che m_1 è il massimo e m_2 il minimo modulo lineare o reciprocamente secondo che la colatitudine u a cui si riferiscono è minore o maggiore della u' rispondente a $\cos \frac{u'}{2} = \sqrt{\lambda}$ e per la quale sono conservati gli angoli e le distanze, è ovvio conchiudere che il modulo angolare all'estremo inferiore di colatitudine u_1 è

$$p = \frac{\lambda}{\cos^2 \frac{u_1}{2}}$$

ed all'estremo superiore

$$p = \frac{\cos^2 \frac{u_2}{2}}{\lambda},$$

e che l'enunciata condizione è soddisfatta da

$$\lambda = \cos \frac{u_1}{2} \cos \frac{u_2}{2}.$$

Indi segue che la u' è data

$$\cos u' = \sqrt{\cos \frac{u_1}{2} \cos \frac{u_2}{2}}.$$

Ed avviene che agli estremi u_1 e u_2 della zona i moduli m_1 e m_2 sono espressi da

$$(m_1)_1 = \frac{1}{(m_2)_1} = (m_2)_2 = \frac{1}{(m_1)_2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{u_1}{2}}{\cos \frac{u_2}{2}}}$$

ed i moduli angolari, fra loro uguali, da

$$p = \frac{\cos \frac{u_2}{2}}{\cos \frac{u_1}{2}};$$

l'uguaglianza di questi moduli significa essersi resa la più piccola possibile la massima alterazione angolare che sempre succede in uno degli estremi; in fine, il semi-errore ε dell'angolo che più vi si sforma è dato da

$$\text{sen } \varepsilon = \frac{p-1}{p+1},$$

ossia

$$\text{sen } \varepsilon = \tan \frac{1}{4} (u_1 + u_2) \tan \frac{1}{4} (u_1 - u_2)$$

Se è $u_1 = 90^\circ$ e $u_2 = 0^\circ$, se convertesi cioè la zona nell'emisfero, cosa utile alla composizione del mappamondo in due pezzi, si trova

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$$

e

$$\cos u' = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

che dà

$$u' = 65^\circ.32';$$

al polo è

$$m_1 = \sqrt{2} = 1,4142, \quad m_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071,$$

all'equatore

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071, \quad m_2 = \sqrt{2} = 1,4142,$$

nei quali luoghi si ha

$$p = \sqrt{2} = 1,4142, \quad \text{sen } \varepsilon = \tan^2 \frac{45^\circ}{2} \text{ e } \varepsilon = 9^\circ.53'.$$

Modificando, per amore di semplicità, il precedente valore di λ e facendo

$$\lambda = 0,7,$$

la proiezione dell'emisfero risulta ben poca diversa, restando semplificate le costruzioni ed essendo la rappresentazione contenuta in un settore di 252° . E trovasi che la colatitudine alla quale sono nulle le alterazioni lineari ed angolari viene data da

$$\cos \frac{u'}{2} = \sqrt{0,7},$$

ed è

$$u' = 66^\circ.25',$$

che al polo ed all'equatore non si scambiano più, come prima, i valori di m_1 e m_2 che nel primo luogo si ha

$$m_1 = \sqrt{\frac{10}{7}} = 1,1952, \quad m_2 = \sqrt{\frac{7}{10}} = 0,8367$$

e nel secondo

$$m_1 = \sqrt{\frac{10}{14}} = 0,8452, \quad m_2 = \sqrt{\frac{14}{10}} = 1,1832,$$

che le alterazioni angolari competenti a questi due luoghi non sono più fra loro uguali avendosi al polo

$$p = \frac{10}{7} = 1,4286, \quad \text{sen } \varepsilon = \frac{3}{17} \text{ e } \varepsilon = 10^\circ. 10'$$

ed all'equatore

$$p = \frac{14}{10} = 1,4, \quad \text{sen } \varepsilon = \frac{1}{6} \text{ e } \varepsilon = 9^\circ 36'.$$

Il TISSOT (1), invece, propone di prendere

$$\lambda = 0,75 = \frac{3}{4},$$

con che la rappresentazione dall'emisfero è contenuta in un settore di 270° , le alterazioni lineari ed angolari sono nulle alla colatitudine di 60° e le alterazioni lineari ed angolari al polo ed all'equatore sono quelle stesse riferite in fine dell'esempio precedente e rispondenti al medesimo valore di λ .

Chi voglia fare il mappamondo in un solo pezzo deve fare $u_2 = 0$ e prendere per u_1 la distanza di uno dei paralleli estremi delle terre australi dal polo boreale, porre, ad esempio, $u_1 = 150^\circ$. Così si viene ad avere la mappa dell'abitabile. Ciò dà

$$\lambda = \cos 75^\circ = 0,2588.$$

Essendo

$$\cos \frac{u_1}{2} = \sqrt{\cos 75^\circ},$$

si trova

$$u' = 118^\circ. 50',$$

per cui le alterazioni lineari ed angolari sono nulle alla latitudine australe di $28^\circ. 50'$. Si ha, poi, che al polo è

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{\cos 75^\circ}} = 1,9656, \quad m_2 = \sqrt{\cos 75^\circ} = 0,5087$$

ed alla latitudine australe di 60°

$$m_1 = \sqrt{\cos 75^\circ} = 0,5087, \quad m_2 = \frac{1}{\sqrt{\cos 75^\circ}} = 1,9656,$$

(1) Op. cit., p. 221.

essendo in questi due luoghi

$$p = \frac{1}{\cos 75^{\circ}} = 3,8637, \text{ sen } \varepsilon = \tan^2 37^{\circ}.30' \text{ e } \varepsilon = 36^{\circ}.04'$$

e che all'equatore si ha

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{2 \cos 75^{\circ}}} = 1,3899, m_2 = \sqrt{2 \cos 75^{\circ}} = 0,7195,$$

$$p = \frac{1}{2 \cos 75^{\circ}} = 1,9319, \tan \left(45^{\circ} + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cos 75^{\circ}}} \text{ e } \varepsilon = 18^{\circ}.32'.$$

Se, per facilitare le costruzioni di siffatto mappamondo, si fa

$$\lambda = 0,25 = \frac{1}{4},$$

la rappresentazione sta in un settore di 90° , il raggio dei paralleli è

$$\rho = 4a \operatorname{sen} \frac{u}{2},$$

le alterazioni lineari ed angolari sono nulle alla latitudine di 120° , ossia alla latitudine australe di 30° , i valori di m_1 e m_2 non più si scambiano al polo ed al parallelo estremo, ossia alla latitudine australe di 60° , ma nel primo luogo si ha

$$m_1 = 2, m_2 = 0,5,$$

nel secondo

$$m_1 = 2 \cos 75^{\circ} = 0,5176, m_2 = \frac{1}{2 \cos 75^{\circ}} = 1,9318,$$

ed in questi due luoghi le alterazioni angolari non sono più uguali fra loro, poichè al polo è

$$p = 4, \tan \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{3} \text{ e } \varepsilon = 36^{\circ}.52'$$

ed all'altro estremo

$$p = \frac{1}{4 \cos^2 75^{\circ}} = 3,7320, \tan \frac{\varepsilon}{2} = \tan \frac{134^{\circ}}{2} \tan \frac{15^{\circ}}{2} \text{ e } \varepsilon = 35^{\circ}.16'.$$

All'equatore, poi, si ha

$$m_1 = \sqrt{2} = 1,4142, m_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$$

$$p = 2, \tan \left(45^{\circ} + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \sqrt{2} \text{ e } \varepsilon = 19^{\circ}.28'.$$

Il TISSOT (1) propone pure di fare il mappamondo in un solo pezzo colla proiezione ora esposta, ma in luogo di porre il parallelo estremo

(1) Op. cit., p. 222.

alla latitudine australe di 60° , lo mette a quella di 50° , fa cioè $u_2 = 0$ e $u_1 = 140^\circ$. Con che trova

$$\lambda = \cos 70^\circ = 0,3420,$$

e

$$\cos \frac{u'}{2} = \sqrt{\cos 70^\circ},$$

per cui le alterazioni lineari ed angolari sono nulle alla distanza polare

$$u' = 108^\circ. 25'$$

ossia alla latitudine australe di $18^\circ. 25'$. Al polo è

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{\cos 70^\circ}} = 1,7099, \quad m_2 = \sqrt{\cos 70^\circ} = 0,5848$$

ed alla latitudine australe di 50°

$$m_1 = \sqrt{\cos 70^\circ} = 0,5848, \quad m_2 = \frac{1}{\sqrt{\cos 70^\circ}} = 1,7099,$$

essendo, in questi due luoghi, uguali le alterazioni angolari, avendosi cioè

$$p = \frac{1}{\cos 70^\circ} = 2,9238, \quad \text{sen } \varepsilon = \tan^2 35^\circ \text{ e } \varepsilon = 29^\circ. 22'.$$

All'equatore, poi, si ha

$$m_2 = \frac{1}{\sqrt{2 \cos 70^\circ}} = 1,2091; \quad m_1 = \sqrt{2 \cos 70^\circ} = 0,8271$$

$$p = \frac{1}{2 \cos 70^\circ} = 1,4619, \quad \tan \left(45^\circ + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cos 70^\circ}} \text{ e } \varepsilon = 10^\circ. 49'.$$

Lo stesso autore ritiene utile la coincidenza degli estremi della proiezione col meridiano posto a 170° di longitudine occidentale da Parigi, il quale attraversa lo stretto di Behring e non incontra alcuna terra.

Chi faccia $u_2 = 0$ e $u_1 = 45^\circ$ trova le formole che riguardano la proiezione della zona che ha il vertice nel polo e per base il parallelo di 45° , ed ha

$$\lambda = 0,9239,$$

per cui la rappresentazione della zona è in un settore di $340^\circ. 21'$. Alla colatitudine di $32^\circ. 02'$ sono nulle le alterazioni lineari ed angolari. Al polo è

$$m_1 = 1,0404, \quad m_2 = 0,9612,$$

alla base della zona

$$m_1 = 0,9612, \quad m_2 = 1,0404,$$

nei quali due luoghi sono uguali le alterazioni angolari essendovi il modulo angolare pari a $1,0824$ e l'errore dell'angolo più sformato uguale a $4^\circ. 33'$.

Seguitando a considerare la proiezione conica col centro dei paralleli

nella proiezione del polo e supponendo ancora la terra sferica, può chiedersi l'errore totale U proveniente dalle alterazioni lineari e sofferto dalla zona limitata dalle colatitudini u_1 e u_2 .

Se nella formola che dà siffatto errore (1) e che è

$$U = 2\pi\alpha^2 \int_{u_2}^{u_1} [(m_1 - t)^2 + (m_2 - t)^2] \sin u \, du$$

si sostituiscono i valori di m_1 e m_2 superiormente riferiti e si eseguisce l'integrazione fra i dati limiti, risulta

$$\begin{aligned} \frac{U}{2\pi\alpha^2} = & 2(\cos u_2 - \cos u_1) - \delta \sqrt{\lambda} \left(\cos \frac{u_2}{2} - \cos \frac{u_1}{2} \right) - \frac{\delta}{3\sqrt{\lambda}} \left(\cos^3 \frac{u_2}{2} - \cos^3 \frac{u_1}{2} \right) \\ & + \frac{1}{\lambda} \left(\cos^4 \frac{u_2}{2} - \cos^4 \frac{u_1}{2} \right) + 4\lambda \log \frac{\cos \frac{u_2}{2}}{\cos \frac{u_1}{2}}, \end{aligned}$$

che per l'emisfero diviene

$$\frac{U}{2\pi\alpha^2} = 2 - \delta \sqrt{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\delta}{3\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + \frac{3}{4\lambda} + 2\lambda \log 2.$$

Chi voglia il valore di λ che rende minimo l'errore totale U deve, e nel caso della zona limitata da due paralleli ed in quella dell'emisfero, risolvere un'equazione di 4° grado.

§ 5. La proiezione polare equivalente, che è un caso particolare della conica, e di cui, avendone detto al Cap. III, §§ 33, 34, 35, 36, 37 e 38 della citata opera, non terremo ulteriore discorso, ha grande importanza non solo per le applicazioni immediate che se ne possono fare, ma altresì perchè dà origine ad altre importanti rappresentazioni. Invero, immaginati i cerchi massimi (azzimutti) condotti pel diametro di un dato punto q della sfera terrestre ed i cerchi (almicantaratti) che gli sono perpendicolari, funzionanti rispetto allo stesso punto nella guisa medesima dei meridiani e paralleli rispetto al polo geografico, si sa che un punto della sfera, essendo l'incontro di un certo almicantaratte con un certo azzimutto, è determinato dalla distanza sferica β dell'almicantaratte dal suo polo q e dall'angolo ω dell'azzimutto coll'azzimutto primario coincidente col meridiano del detto punto q , e che si hanno formole e tavole opportune per trovare le coordinate sferiche β e ω di un punto della sfera quando ne sono note le coordinate geografiche, ossia la latitudine e la longitudine, e reciprocamente (2); ed è noto che una data proiezione polare può es-

(1) *Le proiezioni* ecc. Cap. I, § 26.

(2) *Le proiezioni*, ecc., op. cit., Cap. I, art. IV e V.

sere applicata al sistema degli azzimutti ed almicantaratti sostituendo al polo geografico il punto q , al meridiano l'azzimutto, al parallelo l'almicantaratte, alla longitudine t l'angolo ω , alla colatitudine u l'angolo β . In tale guisa si deduce un nuovo tracciato in cui il punto della sfera rispondente al centro della carta tiene luogo del polo geografico e che perciò potrebbe denominare tracciato centrale. Oppure, osservando che al punto q risponde lo zenitte nello stesso modo che al polo terrestre risponde il celeste, la nuova proiezione si potrebbe anche appellare zenittale. A fine di evitare che tali denominazioni generino qualche confusione, nè avendone altra migliore in pronto, abbiamo adottata quella adoperata dal DE COATPONT e diciamo azzimuttale la rappresentazione di cui qui si discorre, badando a ciò che le linee più facili a tracciarsi sono gli azzimutti e che dal punto centrale della carta ogni altro punto apparisce sotto il suo vero angolo azzimuttale (1).

La proiezione azzimuttale, analogamente alla distinzione che si fa nelle prospettive, dicesi meridiana, ovvero orizzontale, secondo che il polo degli almicantaratti è in un punto dell'equatore, ovvero in altro punto della sfera, e ripiglia il nome di polare quando lo stesso coincide col polo geografico. Al Cap. V, Art. I, della nominata opera, abbiamo trattato distesamente del modo di dedurre dalle proiezioni polari le azzimuttali e discorso della proiezione azzimuttale equivalente, sì meridiana che orizzontale, e qui non diciamo altro.

L'idea di dedurre la proiezione azzimuttale meridiana od orizzontale dalla proiezione polare mediante una trasformazione di coordinate è molto antica, conciossiachè ai cosmografi sia ben presto venuto in mente di trasformare da polare in orizzontale la prospettiva della volta celeste sostituendo al polo celeste lo zenitte, all'equatore l'orizzonte, ai paralleli gli almicantaratti, ai meridiani gli azzimutti. Tralasciando di parlare dei geometri arabi (2),

(1) La denominazione di tracciato centrale è la sinonima di sistema centrale sono adoperate dal COLLIGNON (*Recherches sur la représentation plane de la surface du globe terrestre* nel *Journal de l'Ecole polytechnique*. Tom. XXIV). Il GERMAIN (*Traité des projections des cartes géographiques*, Paris), il GRETSCHEL (*Lehrbuch der Karten-Projektion*, Weimar 1873), l'HERZ (*Lehrbuch der Landkarten-Projektionen*, Lipsia 1885) usano la locuzione di proiezione zenittale; ed il COATPONT (*Propriété et construction d'une carte en projection azimutale équivalente* nel *Bull. de la Soc. de Géographie de Paris*, febb. 1887), quella di proiezione azzimuttale.

(2) I geometri arabi che conservarono e tramandarono ai posteri il Planisfero di TOLOMEO, dove sono insegnate le regole della proiezione stereografica, ebbero la felice idea di sostituire, nella costruzione dei planisferi, la stereografia orizzontale alla polare. Autore di questa innovazione fu l'arabo ARZACHELE, giudeo di nazione, come dice l'AMARI (*Storia dei Mussulmani in Sicilia*, Firenze 1854, Tom I, p. XXX e Tom. III, p. 690), vissuto a Toledo alla metà del secolo XI, il quale, indotto dagli errori riscontrati negli astrolabi costruiti secondo i principi della scuola alessandrina, convertì l'astrolabio antico e particolare dei greci in altro universale colla proiezione orizzontale. E siccome il medesimo non giunse a fare quanto aveva promesso, a scrivere cioè intorno al modo di comporre i suoi astrolabi universali colle prove di geometria, così il Re D. ALFONSO X di Castiglia, nel secolo XIII, ordinò che fosse riempita

accenniamo al WERNER (1), il quale in principio del secolo XVI mostrò come dalla stereografia polare si passi alla orizzontale e primo questa applicò alle carte geografiche facendo seguire la esposizione del suo metodo dalla delineazione dell'emisfero rappresentato stereograficamente sull'orizzonte di Norimberga, patria dell'autore (2). Il LAMBERT generalizzò tale metodo e mostrò come ogni proiezione possa originare l'analoga proiezione azzimutale limitandosi a dare le formole pel caso in cui il polo di proiezione è sull'equatore (3).

§ 6. Nello stesso modo che le proiezioni polari originano le azzimutali, le coniche possono benissimo dar luogo ad altro consimile genere di rappresentazione. In fatto, immaginando il sistema degli azzimutti ed almicantaratti in riguardo al punto q della sfera, posto sul primo meridiano e di colatitudine u' , s'intenda applicata alla sfera la proiezione conica sostituendo al polo geografico il punto q , ai meridiani gli azzimutti, ai paralleli gli almicantaratti; si avrà una proiezione che può appellarsi conica azzimutale e che sarà determinata quando, dicendo β la distanza sferica di un almicantaratte dal suo polo q e ω l'angolo di un azzimutto coll'azzimutto iniziale, ossia col meridiano del punto q , sieno noti la funzione di β che esprime il raggio ρ dell'arco circolare nel quale si proietta l'almicantaratte ed il coefficiente λ che regola la distribuzione degli azzimutti rettilinei incontrantisi nel comun centro degli almicantaratti,

tale lacuna (*Libros del saber de Astronomia del Rey D. Alfonso de Castilla compilados, anados, y comentados por Don Manuel Rico y Sinobas*. Madrid, 1863, Tom. II, p. 87). Parecchi furono, ivi è detto, gli strumenti astronomici nuovi fatti costruire da ARZACHELE; è da ricordare quello in cui, facendosi uso della proiezione meridiana, i paralleli e meridiani celesti sono proiettati stereograficamente sopra un piano perpendicolare all'eclittica e passante pei due punti solstiziali. Ultimamente sull'astrolabio di ARZACHELE scrisse ALMERIGO DA SCHIO (*Di due astrolabi in caratteri cufici occidentali*. Venezia 1880).

(1) GIOVANNI WERNER, n. 1468, m. 1528.

(2) Il metodo del nominato autore è esposto nella Prop. XII del *Libellus Joannis Veneri Nurembergensis de quatuor aliis planis terrarum orbis descriptionibus*. Il quale opuscolo trovasi nella *Introductio geographica Petri Apiani in doctissimas Veneri adnotationes*. Huic accedit translatio nova primi libri *Geographia Cl. Ptolomaei*. Translationi adfunctae sunt argumenta et paraphrases singulorum capitum: *Libellus quoque de quatuor terrarum orbis in plano figurationibus*. Authore Venero. Inglostadii MDXXXIII. E fu pubblicato per la prima volta nel 1514 a Norimberga in una raccolta di scritti geografici, dovuti in massima parte allo stesso WERNER, col titolo: *Libellus de quatuor terrarum orbis in plano figurationibus ab eodem Joanne Venero novissime compertis et enarratis*. Sulla quale raccolta vedi il D'AVEZAC, op. cit. p. 46, e la Nota del JACOLI: *Intorno alla determinazione di Domenico Maria Novara dell'obliquità dell'eclittica nel Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche*, Tom. X, febb. 1867, dove sono larghi cenni sull'edizione del 1514. Il WERNER è brevissimo nella esposizione del metodo stereografico. *Propositam hanc orbis planam descriptionem*, scrive, *nimirum decrevi brevissimi attigisse: atque de illae geographiae studiosis tantummodo labiis admonisse, ut si placeret ea uti possent. Ipsius ampliorem tractationem consulo praeteriri quondam ea trita admodum existit atque ex multis variisque de compositione astrolabii tractatibus. haud multo negotio proficietur*. Vedi pure l'opuscolo del GÜNTHER: *Johann Werner aus Nürnberg Halle 1878 nello Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie von Fr. Siegmund Günther*. Halle. 1879.

(3) Op. cit., Tom. III, p. 175.

e che moltiplicato per l'angolo ω ne dà la rappresentazione v , chè allora la proiezione risulta governata dalle equazioni

$$\rho = \rho(\beta), \quad v = \lambda \omega$$

essendo ρ e v le coordinate polari del punto generale.

Se, nella rappresentazione e nel comun centro degli almicantaratti, dove concorrono gli azzimutti rettilinei, si stabiliscono due assi ortogonali delle X e Y e si fa coincidere il primo coll' azzimutto iniziale, si ha

$$X = \rho(\beta) \cos \lambda \omega, \quad Y = \rho(\beta) \sin \lambda \omega,$$

che sono le coordinate rettangolari del nominato punto generale.

Ponendo l'origine delle longitudini al meridiano del punto q coincidente coll' azzimutto iniziale, e dicendo u la colatitudine e t la longitudine del punto generale, è (1)

$$\cos \beta = \cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos t,$$

$$\tan \omega = \frac{\sin t}{\cot u \sin u' - \cos u' \cos t};$$

così si ha tutto quanto occorre per avere le coordinate polari ρ e v , oppure le rettangolari X e Y in funzione delle coordinate geografiche e per dedurre le equazioni de' meridiani e paralleli.

La proiezione conica azzimuttale dicesi orizzontale o meridiana secondo il polo che q degli almicantaratti giace in un punto qualsiasi della sfera o sull' equatore. Nel secondo caso le precedenti formole, per essere $u' = 90^\circ$, si semplificano ed, introducendo la latitudine l in luogo della colatitudine u , si riducono a

$$\cos \beta = \cos l \cos t,$$

$$\tan \omega = \cot l \sin t.$$

Se è $u' = 0$, si ricade nella proiezione conica.

Ponendo $\lambda = 1$ e facendo coincidere la proiezione del centro degli almicantaratti con quella del loro polo q , si ritrovano le proiezioni azzimuttali, di cui si disse al numero precedente; e se inoltre si fa $u' = 0$ si rientra nelle proiezioni polari.

I vari generi di proiezioni coniche dipendenti dalla funzione ρ ed i vari casi speciali che occorrono in virtù dei valori del coefficiente λ danno luogo ad altrettante proiezioni coniche azzimuttali. Ma noi qui intendiamo limitarci allo studio della proiezione conica azzimuttale equivalente e meridiana, facendone l'applicazione all'emisfero nell'ipotesi che il centro degli almicantaratti coincida colla rappresentazione del loro polo.

E siccome alla composizione del mappamondo giova la rappresentazione dei due emisferi che hanno per base comune un dato meridiano, è

(1) *Le proiezioni* ecc., Cap. I, art. IV.

utile assumere questo distante di 30° di longitudine occidentale da Roma, affinchè la linea di separazione dei due emisferi non incontri grandi continenti e solo poche isole (1). Per tale modo i vertici dei due emisferi, che sono poli di proiezione e che giacciono sull'equatore, l'uno è alla longitudine orientale di 60° , l'altro alla occidentale di 120° .

La rappresentazione dell'emisfero, nel caso di $\lambda < 1$, è contenuta in un settore di ampiezza uguale a $\lambda \cdot 360^\circ$. La parte di circolo rimasta vuota e di ampiezza pari a $(\lambda - 1) 360^\circ$ si può utilizzare col prolungare la carta da ciascun lato che limita il settore pieno per alcuni gradi; cotali prolungamenti, che sono ripetizioni di parti già progettate, valgono a togliere le brusche interruzioni e le discontinuità.

Come si costruirà la rete dei meridiani e paralleli? Meglio è, trovate le coordinate geografiche l e t (latitudine e longitudine) dei vertici della rete, calcolarne le sferiche β e ω ricorrendo alle ultime due formole (2). Allora, nota la legge della proiezione, noti cioè il coefficiente λ e la funzione ρ , si calcolano le coordinate polari ρ e v , oppure le rettangolari X e Y de' nominati vertici, e si avrà così il modo di collocarli sulla carta e di tracciare, per mezzo delle loro opportune congiunzioni, i meridiani ed i paralleli.

La proiezione in discorso, per le limitazioni fatte, per essere cioè il centro degli almicantarati coincidente colla proiezione del loro polo, è governata (§ 4) dalle equazioni

$$\rho = \frac{2a}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}, \quad v = \lambda \omega$$

Volendo che le alterazioni angolari siano eguali alla base ed al vertice dell'emisfero, con che la massima alterazione angolare, che sempre succede in uno degli estremi, è resa la più piccola possibile, si trova (vedi esem. 2° del § 4).

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071.$$

Da quanto là si è detto si trae che le alterazioni lineari ed angolari sono nulle alla distanza di $65^\circ.32'$ dal vertice dell'emisfero, che le distanze, nella direzione degli azzimutti, soggiacciono a dilatazioni o contrazioni secondo che si procede dall'almicantarate di $65^\circ.32'$ verso il vertice o verso

(1) Così, la comune base dei due emisferi incontra quasi solo la superficie oceanica, e più propriamente, dall'una parte taglia l'Irlanda, dall'altra l'estremo lembo d'Asia al di là del Giappone; l'uno emisfero contiene il vecchio, l'altro il nuovo continente.

(2) A trovare β e ω , quando si conoscano l e t , giovano le due apposite tavole poste in fine del Cap. I delle *Proiezioni delle carte geografiche*, op. cit.

la base dell'emisfero, che l'opposto ha luogo nella direzione degli almicantarati. Identici sono i limiti delle dilatazioni e contrazioni; queste vanno da 0 a 0,1591, quelle da 0 a 0,1892. Là dove avvengono le massime dilatazioni e contrazioni, cioè al vertice ed alla base dell'emisfero, si manifestano e pareggiansi le massime alterazioni angolari; il modulo angolare vi risulta uguale a 1,4142 e l'errore dell'angolo più sformato raggiunge 19°. 46'.

La rappresentazione dell'emisfero è accolta in un settore di 254°. 33'; la parte vuota del circolo è di 105°. 27'.

Questa proiezione fu studiata dal TISSOT (1), il quale propone di attribuire a λ un valore più semplice e di fare

$$\lambda = 0,75 = \frac{3}{4}.$$

Con che (§ 4, es. 2°) le alterazioni lineari ed angolari sono nulle all'almicantarate di 60°. E si ha che le distanze, nella direzione degli azzimutti, da questo almicantarate al polo di proiezione soggiacciono a dilatazioni che crescono da 0 a 0,1547, mentre nella direzione degli almicantarati avvengono contrazioni che vanno da 0 a 0,1340; l'opposto succede dal detto almicantarate alla base dell'emisfero; gli azzimutti sono soggetti a contrazione, gli almicantarati a dilatazione, essendo, alla base dell'emisfero, questa uguale a 0,2247, quella a 0,1835. Oltre ciò le alterazioni angolari, nulle all'almicantarate di 60°, crescono a misura che ce ne scostiamo ed agli estremi non sono più fra loro uguali; l'errore dell'angolo soggetto alla massima alterazione, al vertice dell'emisfero raggiunge 16°. 26' alla base 23°. 04'.

La rappresentazione conica azzimuttale meridiana il cui centro coincide col polo della proiezione riesce utile alla carta dell'Africa. Meglio è collocare, come vuole il TISSOT (2), questo polo in prossimità della costa del Gabon e, siccome esso è sull'equatore, intendere che l'arco equatoriale inoltrantesi nell'Oceano sia quello che deve sdoppiarsi nella proiezione per formare i limiti del settore contenente la rappresentazione a fine di evitare il malanno della discontinuità. Non è necessario, ad ottenere la mappa del continente africano, progettare tutto l'emisfero, basta mettere la base della zona alla distanza di 45° dal vertice, che anzi si ha ancora il vantaggio di vedere rappresentate le prossime coste europee ed asiatiche. E se si vuole che le alterazioni angolari sieno uguali al vertice ed alla base della zona basta ricorrere a quanto si disse al § 4, es. 2°. Sarà dunque,

$$\lambda = 0,9239,$$

per cui la proiezione si contiene in un settore di 340°. 21'. E si ha che

(1) Op. cit., p. 116.

(2) Op. cit., p. 122.

le alterazioni lineari ed angolari sono nulle all'almicantaratte di $32^{\circ}.02'$, che a partire da questo e procedendo verso il suo polo avvengono dilatazioni lineari nella direzione degli azzimutti, contrazioni secondo gli almicantaratti, quelle andando da 0 a 0,0404, queste da 0 a 0,0388, che l'opposto accade procedendo verso la base della zona essendo identici i limiti delle dilatazioni e contrazioni, che al vertice ed alla base della zona, dove sono uguali le alterazioni angolari, l'errore dell'angolo più sformato è di $4^{\circ}.33'$.

Il TISSOT osserva che si migliora la proiezione, rendendone minori le alterazioni, col porre la base della zona allà distanza di 43° dal vertice, con che restano rappresentati, oltre il continente africano, il Mediterraneo, il Mar Rosso, le coste europee ed arabiche e l'Isola di Madagascar. Così ha fatto lo ZÖPPRITZ, il quale costruì la carta dell'Africa in consimile proiezione (1), Con questo nuovo dato si trova che è

$$\lambda = 0,9594,$$

per cui la proiezione si raccoglie in un settore di $334^{\circ}.55'$, che le alterazioni lineari ed angolari sono nulle all'almicantaratte di $30^{\circ}.35'$, che le dilatazioni e contrazioni lineari nella direzione degli azzimutti e degli almicantaratti avvengono nel senso indicato, essendo 0,0367 il limite delle prime e 0,0354 il limite delle seconde, e che l'errore dell'angolo soggetto alla massima alterazione è, negli estremi, di $4^{\circ}.7'$.

La rappresentazione conica azzimutale orizzontale il cui centro coincida colla proiezione del polo degli almicantaratti, al pari della meridiana, riesce utile alle mappe degli emisferi e dei segmenti sferici maggiori o minori della mezza sfera per la costruzione dei mappamondi e delle carte delle grandi regioni. Credendo di avere già discorso abbastanza di questo genere di proiezioni, non intendiamo venire ad ulteriori applicazioni. Ci piace soltanto osservare col TISSOT (2), che l'Europa, meno una parte dello Spitzberg e della Nuova Zembla è compresa nell'interno di una zona sferica avente il suo polo in Polonia nei dintorni di Plok ed il cui raggio è di 25° , che il raggio della zona, la meno estesa, contenente l'Asia è di 50° , che, per l'America Settentrionale e per l'Africa, le rispondenti zone hanno 40° di raggio, che per l'America Meridionale il raggio della zona è di 33° , che per questa è meglio prendere il raggio di 37° e dirigere nel Pacifico l'arco di circolo massimo soggetto allo sdoppiamento.

§ 7. A determinare (§ 3) le equazioni (3) e (4) che governano la proiezione richieggasi che le distanze fra i paralleli della rappresentazione

(1) *Die Wahl der Projektion für Atlanten und Handkarten in Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin*, XIX, 1884, p. 1.

(2) Op. cit., p. 120.

sieno proporzionali ai loro intervalli sulla superficie obbiettiva. Con ciò è data la (3) e se ne deve dedurre la (4).

Essendo $r_1 du$ l'elemento dell'arco di meridiano ed indicando con α un coefficiente costante si ha

$$d\rho = \alpha r_1 du,$$

da cui, dicendo ρ' il raggio dell'arco circolare che rappresenta un dato parallelo u' e chiamando σ e σ' gli archi meridiani obbiettivi che dal polo vanno ai paralleli u e u' , si trae

$$(8) \quad \rho = \alpha \int_u^{u'} r_1 du + \rho' = \alpha (\sigma - \sigma') + \rho'$$

e

$$(9) \quad v = \frac{\mu^2 r_2 t}{\alpha \rho} + \varphi(u).$$

Tali sono le coordinate polari del punto generale della rappresentazione in funzione delle coordinate geografiche.

Dalle (6) si ha

$$(10) \quad \tan \vartheta = \cot I = \frac{\rho \frac{dv}{du}}{\alpha r_1}$$

e dalle (7)

$$(11) \quad m' = \frac{\alpha}{\cos \vartheta}, \quad m'' = \frac{\mu^2}{\alpha}.$$

Queste formole, che danno l'alterazione dell'angolo del parallelo col meridiano ed i moduli lineari de' meridiani e paralleli, valgono a trovare (§ 1) le direzioni principali, i loro moduli e le varie alterazioni lineari ed angolari, e l'ultima dice che il modulo competente al parallelo è costante qualunque ne sia la colatitudine.

Si consideri il caso in cui il meridiano iniziale si proietta secondo un raggio dei paralleli, assunto quale origine delle v . Allora è $\varphi(u) = 0$ e se ne traggono alcune importanti conseguenze. La (9) dà

$$\rho v = \mu^2 \frac{r_2 t}{\alpha}$$

e quindi

$$\rho \frac{dv}{du} + v \frac{d\rho}{du} = \frac{\mu^2 t}{\alpha} \frac{dr_2}{du},$$

per cui, avvertendo alle relazioni

$$d\rho = \alpha r_1 du, \quad \cos u = \frac{dr_2}{r_1 du},$$

la (10) si cambia in

$$\tan \delta = \frac{\mu^2 t}{\alpha^2} \cos u - v,$$

oppure in

$$\tan \delta = \frac{\mu^2 t}{\alpha} \left(\frac{\cos u}{\alpha} - \frac{r_2}{\rho} \right).$$

L'alterazione δ è nulla per $t=0$ ed alla colatitudine u data da $\rho \cos u - \alpha r_2 = 0$; in altri termini, il meridiano iniziale è, sulla carta, incontrato dai paralleli ad angolo retto, ed alla nominata colatitudine i meridiani incontrano pure normalmente il parallelo. Ed havvi di più: sul meridiano iniziale le distanze sono amplificate secondo il rapporto α ; gli altri meridiani, poi, lo incontrano nel punto in cui si proietta il polo, posto alla distanza di $\rho = \rho' - \alpha \sigma'$ dal comun centro dei paralleli e sotto l'angolo che ha per tangente $\frac{\mu^2 t}{\alpha^2}$.

Facile riesce la costruzione della carta. Tracciata la retta che rappresenta il meridiano iniziale e su cui è il comun centro de' paralleli, descritto col raggio ρ' l'arco circolare secondo cui si proietta il parallelo u' , inferiormente e superiormente a questo portati su quella i gradi di latitudine moltiplicati per α , si hanno altrettanti punti per cui passano i circoli concentrici dei paralleli. E se sopra questi, a partire dal meridiano iniziale, si portano i rispondenti gradi di longitudine moltiplicati per $\frac{\mu^2}{\alpha}$, i meridiani altro non sono che le linee congiungenti i punti di uguale divisione.

§ 8. Se, per amore di semplicità, la proiezione or ora studiata deve riuscire equivalente ed avere le distanze dei paralleli uguali ai loro intervalli sulla superficie obbiettiva, le equazioni (8), (9), (10) e (11), per essere, $\alpha=1$ e $\mu^2=1$, divengono

$$(8)' \quad \rho = \int_u^u r_1 du + \rho' = \sigma - \sigma' + \rho',$$

$$(9)' \quad v = \frac{r_2 t}{\rho} + \varphi(u),$$

$$(10)' \quad \tan \delta = \frac{\rho \frac{dv}{du}}{r_1},$$

$$(11)' \quad m' = \frac{1}{\cos \delta}, \quad m'' = 1,$$

delle quali l'ultima significa la conservazione delle distanze sui paralleli.

Ecco, intanto, alcuni importanti corollari. L'equazione che dà (§ 1) i moduli principali m_1 e m_2 risulta

$$m^4 - (2 + \tan^2 \delta) m^2 + 1 = 0,$$

che, badando ai valori positivi di m , somministra

$$\left. \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right\} = \pm \frac{1}{2} \tan \delta + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 \delta}.$$

E quali sono le direzioni principali a cui spettano i moduli m_1 e m_2 ? Dicendo φ e Φ l'inclinazione obbiettiva e la subbiettiva della direzione m_1 sul parallelo, considerando che a questo compete l'unità come modulo si ha (1)

$$\tan \varphi = \pm m_1 = \pm \frac{1}{m_2},$$

$$\tan \Phi = \pm \frac{1}{m_1} = \pm m_2.$$

Ricorrendo a note formole (2) si trova che a calcolare l'errore 2ε dell'angolo più alterato, il quale, trattandosi di una proiezione equivalente, è formato dalle tangenti alle due curve isoperimetre, coincidenti colle curve di massima deviazione dalle direzioni principali, si ha

$$\tan \varepsilon = \frac{1}{2} \tan \delta.$$

Si sa pure che le formole atte a dare, obbiettivamente e subbiettivamente, gli angoli delle nominate tangenti colla direzione m_1 sono quelle, poco fa riferite, riguardanti l'angolo di questa direzione col parallelo e che è

$$\varphi = 45^\circ + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\Phi = 45^\circ - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left. \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right\} = \tan \left(45^\circ \pm \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

L'angolo delle due linee isoperimetre, diviso per metà dalla direzione m_1 vale 2φ , pari a $90^\circ + \varepsilon$, oppure a 2Φ , uguale a $90^\circ - \varepsilon$, secondo che la si contempla obbiettivamente o subbiettivamente, sullo sferoide cioè o sul piano di proiezione. E siccome l'angolo del meridiano col parallelo è, obbiettivamente, di 90° ed una delle curve isoperimetre coincide col parallelo, così l'altra fa col meridiano, in sullo sferoide, l'angolo ε . Se, dunque, sopra quest'ultima si passa dal punto (u, t) al punto $(u+du, t+dt)$ si trova

$$\tan \varepsilon = \frac{r_2 dt}{r_1 du}.$$

(1) Vedi *Le proiezioni* ecc., Cap. I, formola (19).

(2) *Le proiezioni* ecc. Cap. I, formola (32).

da cui ricavasi

$$dt = \frac{r_1 \tan \delta}{2 r_2} du,$$

che è l'equazione differenziale della seconda linea.

Nel caso in cui il meridiano iniziale si proietta secondo un raggio de' paralleli, dal quale si contino gli angoli v , è nulla la $\varphi(u)$ e si ha

$$\tan \delta = t \left(\cos u - \frac{r_2}{\rho} \right).$$

È però pei punti posti sul meridiano iniziale e sul parallelo di colatitudine u data da

$$\rho \cos u - r_2 = 0$$

i moduli principali uguagliano l'unità, sono nulle le alterazioni angolari, e gli elementi lineari uscenti da un punto qualsiasi di cotali due linee conservano le loro lunghezze e direzioni. I meridiani, poi, incontrano il meridiano iniziale nel punto dove si proietta il polo alla distanza di $\rho' - \sigma'$ dal centro dei paralleli e sotto l'angolo la cui tangente uguaglia la longitudine t . Risulta semplificato il metodo accennato alla fine del § precedente per tracciare la rete de' meridiani e paralleli. Imperocchè basta portare sul meridiano iniziale, sopra e sotto il parallelo u' descritto col raggio ρ' , i gradi di longitudine per avere i punti pei quali devono passare i paralleli, e portare su questi i rispondenti gradi di longitudine uguali agli obbiettivi per ottenere i punti per cui passano i meridiani.

§ 9. Una prima applicazione delle cose dette nei due §§ precedenti si ha in certe proiezioni, note sotto il nome di proiezioni cordiformi del WERNER.

Considerando la sfera ed il caso della coincidenza del comun centro de' paralleli colla proiezione del polo e della conservazione delle distanze sul meridiano iniziale e ad un tempo centrale, steso in linea retta, si ha

$$r_1 = a, \quad r_2 = a \sin u, \quad \rho' = \sigma, \quad \sigma = 0, \quad \alpha = t;$$

e però le formole (8), (9), (10) e (11) divengono

$$(8)'' \quad \rho = au,$$

$$(9)'' \quad v = \frac{\mu^2 t \sin u}{u},$$

$$(10)'' \quad \tan \delta = \mu^2 t \left(\cos u - \frac{\sin u}{u} \right),$$

$$(11)'' \quad m' = \frac{1}{\cos \delta}, \quad m'' = \mu^2.$$

Il costante modulo superficiale uguaglia il costante modulo lineare dei paralleli; in altri termini, il rapporto d'ingrandimento delle aree è uguale al rapporto amplificativo delle distanze nella direzione dei paralleli.

Il processo indicato nel § 7 per la composizione della mappa rimane semplificato. Portati sulla retta che deve rappresentare il semimeridiano iniziale i 180 gradi di latitudine, si hanno i punti pei quali devono passare i paralleli che hanno il comun centro nel polo positivo, e se sopra questi, a partire dal meridiano iniziale, si portano i gradi di longitudine uguali agli obiettivi moltiplicati per μ^2 si hanno i punti per cui passano i meridiani. Se, poi, è $\mu^2 = 1$, i gradi di longitudine dei paralleli sono perfettamente uguali a quelli della sfera.

Il meridiano centrale incontra i paralleli ad angolo retto, ed i meridiani nell'uscire dal polo, lo tagliano sotto l'angolo $\mu^2 t$.

L'equazione (9)'' mostra che, nel caso di $\mu^2 = 1$, ovvero $\mu^2 < 1$, i perimetri degl'intieri paralleli sono rappresentati da archi circolari minori di 360°. Se è $\mu^2 > 1$, il parallelo di colatitudine U , determinata da

$$\mu^2 \text{sen } U = U,$$

è rappresentato da un'intiera circonferenza, i paralleli di maggior colatitudine proiettansi secondo archi minori di 360° e quelli di colatitudine minore non si possono intieramente rappresentare senza che avvengano sovrapposizioni; in questo ultimo caso, per essere al polo $v = \mu^2 t$, la proiezione deve

essere limitata da $t = 0$ a $t = \pm \frac{\pi}{\mu^2}$, con che si viene a rappresentare il

fuso sferico di ampiezza $\frac{2\pi}{\mu^2}$.

La costante μ^2 può assumersi arbitrariamente ovvero determinarsi da qualche peculiare condizione a cui si voglia assoggettare la proiezione. Noi la determineremo in guisa da ottenere le tre proiezioni cordiformi del WERNER.

Proiezione 1.^a — La semi-circonferenza del circolo passante pel mezzo del meridiano iniziale, che è anche il centrale, deve rappresentare il semi-equa-

tore. Ciò dà $U = \frac{\pi}{2}$ che somministra

$$\mu^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Qui l'equatore è rappresentato da un'intiera circonferenza; ma i paralleli boreali non si possono rappresentare intieramente in modo utile. L'at-

tuale proiezione serve benissimo alla rappresentazione dell'emisfero od anche di un fuso sferico estendentesi in longitudine non più di $\frac{\pi}{2} 360^\circ$, cioè di $229^\circ 11'$, ma non a formare la mappa di tutta la sfera.

Proiezione 2.^a — Il quadrante dell'arco circolare che fa le veci dell'equatore deve uguagliare il raggio con cui è descritto. Ciò è dire che il quadrante dell'equatore uguaglia il quadrante del meridiano iniziale. Per tale modo si ha

$$\alpha = \mu^2 - 1,$$

e la proiezione risulta equivalente.

I perimetri dei paralleli sono rappresentati da archi circolari $< 360^\circ$; così i perimetri dell'equatore e dei paralleli distanti dal polo di 60° , 45° e 30° sono archi di $229^\circ 11'$, $297^\circ 43'$, $324^\circ 02'$ e $343^\circ 46'$. Le proiezioni degli interi paralleli a misura che si approssimano al polo tendono a divenire archi di 360° , ossia intiere circonferenze; e ciò è sì vero che al polo sono conservati gli angoli che i meridiani fanno fra loro. Il mappamondo in un pezzo solo si ottiene facendo variare u da 0° a 180° e t da 0° a $\pm 180^\circ$.

In questa seconda proiezione valgono le formole riferite al § 5. Delle due curve isoperimetre passanti per ciaschedun punto, l'una coincide col parallelo, l'altra ha per equazione

$$dt = \frac{1}{2} \tan \delta \frac{du}{\sin u}$$

che, per la (10)", riducesi a

$$\frac{2 dt}{t} = \left(\cot u - \frac{1}{u} \right) du$$

e che, integrando fra i limiti (u, t) e (u', t') dà

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{u' \sin u}{u \sin u'},$$

ed in coordinate polari

$$\left(\frac{v}{v'} \right)^2 = \left(\frac{\rho' \sin \frac{\rho}{a}}{\rho \sin \frac{\rho'}{a}} \right)^3$$

Proiezione 3.^a — Sull'arco equatoriale, a destra ed a sinistra del meridiano centrale steso in linea retta, si assume un arco di 60° per avere la rappresentazione del semi-equatore. A questo modo $\frac{\pi}{3}$ è il rapporto, in

sulla carta, del grado equatoriale al grado latitudinale, è, in altri termini, il rapporto nel quale il grado equatoriale obbiettivo è amplificato nella rappresentazione. Si ha, dunque,

$$\mu^2 = \frac{\pi}{3}.$$

Il parallelo distante di 30° dal polo si proietta secondo un'intera circonferenza. È impossibile la rappresentazione di tutta la sfera senza che avvengano sovrapposizioni, possibile quella dell'emisfero, come pure, di un fuso sferico estendentesi in longitudine non più di $\frac{3}{\pi} 360^\circ$, ossia di $343^\circ. 46'$. Il semi-equatore e i semi-paralleli di 60° , 45° e 30° sono archi di 120° , $155^\circ. 53'$, $169^\circ. 43'$ e 180° .

Queste tre proiezioni che abbiamo numerate sono dette cordiformi e prendono nome dal WERNER, perchè le mappe costruite con tali regole acquistano una forma che molto si approssima a quella del cuore umano e perchè il WERNER le espose in un opuscolo venuto in luce nel 1514 ed intitolato: *Libellus Joannis Verneri Nurenburgensis, de quatuor aliis planis terrarum orbis descriptionibus* (1), nella cui Prop. IV è contenuta la proiezione 1^a, nella V la 2^a, nella VI la 3^a (2). E nomandole cordiformi non si fa altro che seguire la mente dell'autore, il quale nella Prop. IV, dicendo che i meridiani sono le linee congiungenti i punti di uguale divisione dei paralleli, intorno alla loro delineazione ha: *scribantur curvæ lineæ quæ reddent cordis effigiem*, e, nella Prop. V, di ciascun semi-meridiano dice: *forma dimidii cordis emerget* e dopo seguita ancora a parlare de' cuori.

L'autore dedicò il libello al suo concittadino BILIBALDO PIRCKHEIMER, uomo dotato di grande erudizione e persona generosissima (3). Nel lodarne la generosità, rammenta come fosse spesso invitato alla casa sua a fruire della conversazione dei dotti che là convenivano; gli esprime tutta la gratitudine pei molti doni ricevuti di libri greci e latini e specialmente per la non mediocre pecunia avuta a mutuo a fine di pubblicare certi opuscoli. E così conchiude la dedica: *Dicare tibi constitui libellum hunc, quem de recentibus quatuor terrarum orbis super plano figurationibus, Joanne Stabio haud vulgari mathematico eorumdem figurationum theoriam ac primaria incubula mihi suggerente, his proximis diebus composueram, quamquam certe non nesciam majorum tibi deberi operum destinationem.*

(1) Intorno a tale opuscolo vedi la nota in fine del § 5.

(2) La quarta proiezione, poichè quattro ne sono menzionate nel titolo dell'opuscolo, è la proiezione stereografica orizzontale sull'orizzonte di Norimberga, di cui si disse al § 5.

(3) WILIBALD PIRCKHEIMER, n. 1470, m. 1530, di famiglia patrizia di Norimberga.

Dalle quali parole apparisce come la prima idea delle proiezioni cordiformi sia stata suggerita al WERNER da GIOVANNI STAB (1). Nè è a dire che quegli siasi limitato a riferire le regole e i disegni che questi abbia potuto suggerirgli intorno alle nominate proiezioni. Imperocchè l'autore, nel citato libello che contiene dodici proposizioni e alcune tavole numeriche, le conforta di tutto l'apparato scientifico necessario alla loro perfetta conoscenza teorica e pratica (2).

L'origine prima delle proiezioni cordiformi è, in certo qual modo, nella proiezione di TOLOMEO a meridiani curvilinei per la mappa dell'abitabile. Invero il geografo d'Alessandria, conservati i gradi di latitudine sul meridiano iniziale steso in linea retta, segnati i punti pei quali devono passare i vari paralleli, del comun centro di questi fissata la posizione, non nel polo, ma in un determinato punto seguendo certi criteri, e fattane la descrizione con archi circolari, ne divide tre che sono quelli di Thule, di Siena e dell'antiparalelo di Meroè nei loro gradi di longitudine uguali ai gradi obbiettivi e conduce per mezzo di archi circolari i meridiani pei loro punti di divisione. La quale regola fu modificata dal SILVANO nel Tolomeo del 1511; non è detto il modo, ma tutto porta a credere che egli, volendo rappresentare tutte le terre note a' giorni suoi, abbia conservati i gradi di longitudine sopra l'equatore, sopra tre paralleli australi ed otto boreali e congiunti con linee i loro punti di divisione per avere i meridiani.

(1) Vedi quanto scrivono in proposito il D' AVEZAC, op. cit. p. 45 e 46, il BREUSING negli opuscoli: *Gerhard Kremer gen. Mercator*, 2^a ed., Duisburgo 1878, p. 45; *Leitsfaden durch das Wiegenalter der Kartographie bis zum Jahre 1600*, Frankfurt A. M. 1883, p. 9 e lo STEINHAUSER nello *Stabius redivivus* (*Zeitschrift für wissenschaftliche Geographie*, Wien, 1885, p. 289. Questi due ultimi scrittori ne fanno sapere che lo STAB, proclamato dal WERNER non volgare matematico, era nativo di Steyer nell'Austria superiore, che verso la fine del secolo XV fu professore all'Università d'Inngolstadt, che s'intrattene nel 1502 a Norimberga a fine di fare un orologio solare per la Chiesa di S. Lorenzo e vi divenne amico del WERNER, che più tardi fu professore all'Università di Vienna, dove ebbe la carica di segretario dell'imperatore MASSIMILIANO I, al cui fianco stava in pace ed in guerra, e fu coronato poeta dal monarca, cultore pur esso della poesia e già incoronatore, a Mantova nel 1588, di altro poeta geografo, del LORITZ (ENRICUS GLAREANUS).

Lo STAB, morto a Graz nel 1522, elogiato dal WERNER, detto dal CUSPINIAN uomo di acuta mente e rara erudizione, era fra i più valenti cartografi. Lo mostra il suggerimento dato al WERNER per le tre proiezioni cordiformi e per la trasformazione della stereografia polare in orizzontale. Ne fa testimonianza il PEYERBACH che cita fra le opere di lui: *Compositiones variarum projectionum universalium Ptolomaei pro toto globo*. Fra le quali havvi *Imago terrae* (Norimberga 1515) in due fogli incisa in legno da ALBERTO DURER, della quale in *Monatsberichte der Berliner Gesellschaft für Erdkunde*, 1848, Tom. V. p. 230, è contenuta una copia impicciolita. Ed il LA LANDE, nella sua *Bibliographie astronomique*, ha che ALBERTO DURER pubblicò due emisferi incisi in legno colle stelle, secondo il catalogo di TOLOMEO, collocate a posto seguendo i consigli dello STAB e legate poscia con figure dello stesso DURER.

Dello STAB e della proiezione cordiforme equivalente, dallo stesso suggerita al WERNER, ha discorsolutamente il GELICHH (*Zur Geschichte der Arealbestimmung eines Landes in Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde*, Tom. XXI, 1886).

(2) Del WERNER, delle sue opere e delle sue proiezioni, discorre il GÜNTHER nella monografia: *Johann Werner aus Nürnberg. Halle 1878 in Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie von Dr. Siegmund Günther. Halle 1879, p. 277.*

Con che la mappa veniva a prender una forma alla quale ben poco mancava per potersi dire cordiforme (1). Ora non è forse vero che lo STAB ed il WERNER seguirono in gran parte il metodo Tolomaico modificato dal SILVANO, staccandosene solo in ciò che essi posero nel polo il comun centro de' paralleli?

Delle tre esposte proiezioni cordiformi si divulgò e fu molto praticata la seconda, quella cioè che ha la proprietà di essere equivalente. Fra i divulgatori va distinto ORONZIO FINEO, il quale compose un mappamondo intitolato: *Nova et integra universalis orbis descriptio*, ed offerente i due emisferi in due parti distinte (2). Queste hanno forma di cuore, sono attraversate dal meridiano centrale nel cui punto di mezzo si toccano le due curve esteriori rappresentative dell'equatore. Importante n'è la leggenda che qui trascriviamo:

Orontius F. Delph.

ad lectorem:

Offerimus tibi, candide lector, universam orbis terrarum descriptionem juxta recentium geographorum ac hydrographorum mentem, servata, tum æquatoris, tum parallelorum, ad eos quæ ex centris proportionem, gemina cordis humani formula in plano cœxtensam; quorum lævæ borealem, dextra vera australem mundi partem complectitur. Tu igitur etc.

Vale. MDXXXI

Mense Julio.

Dalla quale iscrizione e dall'esame della tavola rendesi manifesto che l'autore disegnò i due emisferi colle norme della proiezione cordiforme equivalente, la seconda superiormente riferita, e che la rappresentazione col metodo cordiforme è arrestata all'equatore per evitare le enormi alterazioni a cui si va incontro seguitando a proiettare gli ulteriori paralleli (3).

GERARDO MERCATORE e GASPARE VOPELL, seguendo il FINEO, fecero pure il mappamondo in due parti cordiformi. La carta del MERCATORE, la quale fu probabilmente un primo suo saggio e che rimase per tanto tempo sconosciuta, è stata trovata non è molto in America in un Tolomeo che gli apparteneva, e che ora è posseduto dalla Società Geografica di Nuova York. La carta, poi, del VOPELL, rinomato geografo di Colonia, ma nato a Medebach, è pur troppo smarrita. Quella ha la data del 1538, questa la probabile del 1540 (4).

(1) Della proiezione di TOLOMEO e delle modificazioni del SILVANO si è trattato nelle *Proiezioni*, ecc. Cap. VIII, §§ 14 e 15.

(2) Il mappamondo del FINEO è nell'opera: *Novus orbis regionum ac insularum veteribus incognitorum. Parisiis 1532.*

(3) Le posteriori edizioni del *Novus orbis* mancano della mappa cordiforme.

(4) Così ha intorno a tali due carte il BREUSING in *Leitfaden durch das Wiegengalter der Kartographie bis zum Jahre 1600.* FRANKFURT A. M. 1883, p. 9.

Anche in Italia si usarono ed ebbero voga i mappamondi equivalenti in forma di cuore. Bellissima è la tavola incisa in Roma da ANTONIO LAFRERI, nella quale sono rappresentati i due emisferi, il boreale e l'australe, nel modo praticato dal FINEO. La carta è mancante di data, ma dev'essere venuta in luce verso la metà del secolo XVI; ciò provano tre tavole dello stesso autore pure incise in Roma, l'una colla data del 1551, l'altra che è una carta della vallata del Po, colla data del 1554, la terza intitolata: *La descrizione della prima parte dell'Asia di Jacopo Gastaldi piemontese cosmografo, restituita da Antonio Lafreri* colla data del 1561 (1).

Altro chiaro esempio di mappamondo cordiforme si ha nella mappa turchesca, di autore tunisino, intagliata su quattro tavole lignee, ritrovata a Venezia, nel 1795, nell'Archivio segreto del Consiglio dei Dieci, ed ora conservata nella Biblioteca Marciana di quella città. L'ASSEMANI che la illustrò, ne mette la data all'anno dell'egira 967, rispondente al 1569 dell'era nostra. Il FRANCESCONI riferì cotale mappamondo in scala minore del vero, in una illustrazione di lavori geografici (2); ne dà una descrizione il D'AVEZAC, il quale accenna ai vari autori che ne parlarono (3).

Colla proiezione cordiforme equivalente ed in un solo pezzo è pure lavorata la magnifica mappa di tutta la sfera terrestre incisa nel 1566 dal CIMERLINO ed intitolata: *Cosmographiæ universalis ab Orontio olim descripta* (4).

Per la quale iscrizione sembra che il FINEO usasse anche delineare il mappamondo in un solo cuore. Vero è che in certo qual modo vi contraddice il RUSCELLI, che, parlando di « cotanti bei mappamondi come quello di ORONZIO in forma di cuore e più altri », biasima la loro costruzione dominata dal pensiero di formare la prospettiva della sola « mezza palla » (5). Ma per l'altra parte si ha la testimonianza dello SEVERT, il quale accennando al cuore del FINEO, scrive: *Polum articum habet in suprema ac sinuosa cordis parte, antarticum vero in inferna ejus acie reposita, minimeque conspicuum* (6).

La proiezione cordiforme equivalente fu anche adoperata per le mappe delle grandi regioni terrestri. Ne sono esempio la carta dell'Asia nel *Thea-*

(1) Le citate tavole ed il mappamondo cordiforme del LAFRERI vidi in un volume di antiche carte geografiche conservato nella Biblioteca degli archivi del Regno in Torino.

(2) *Illustrazione di un'urnetta lavorata all'agemina*. Venezia, 1880, art. IV.

(3) *Bull. de la Soc. de géographie de Paris*, 5^a serie, Tom. 10.

(4) La tavola del CIMERLINO, in cui leggesi: *Joannes Paulus Cimerlinas in æs incidebat. Anno MDLXIV*, vidi a Torino negli archivi del Regno.

(5) *Esposizioni et introduzioni universali di Gerolamo Ruscelli sopra la Geografia di Tolomeo*. Venezia, 1561, Cap. VI.

(6) *De orbis catoptrici, seu mapparum mundi principiis, descriptione ac usu*. Ed. 2^a. Parigi, 1598, lib. 3^o, Cap. ultimo.

trum orbis terrarum dell'Ortelio (1), e le tavole dell'Africa e dell'Asia nell'Atlante di GERARDO MERCATORE e JACOPO ONDIO (2). La tavola dell'Africa ha l'iscrizione: *AFRICA. Ex magna terrae descriptione Gerardi Mercatoris desumpta. Studio et industria G. M. Junioris*. Analoga iscrizione ha la tavola dell'Asia. Queste due tavole, dunque, ricavò GERARDO MERCATORE giuniore, il nipote, dal mappamondo cordiforme in due parti costruito, come si disse superiormente, nel 1538 dal grande GERARDO seniore, che n'era l'avo.

I mappamondi cordiformi, che furono in grande onore nel secolo XV e particolarmente verso la sua metà, andarono ben presto in disuso per non più risorgere. Nè ciò deve recar meraviglia. Le enormi alterazioni lineari ed angolari che si manifestano nelle regioni distanti dal meridiano centrale ed anche più se si tratta dell'emisfero opposto al polo che serve di centro ai paralleli dissuasero i cartografi dall'impiego della proiezione cordiforme. Con ragione LIVIO SANUTO, parlando delle varie forme del planisfero scriveva: « Di quella poi che si vede in forma di cuore, se « nell'emisfero settentrionale si dimostra con mediocre proporzione, nello « australe appare insopportabile, per essere quasi ivi tutta distirata e ri- « piena di alterazioni grandissime; sì che non si può regione alcuna di- « scernere ove si confaccia la sua vera figura » (3). Non è a dire tuttavia che i mappamondi cordiformi non possano riuscire di qualche vantaggio. E giustamente il D'AVEZAC, nella citata Memoria sulla menzionata mappa turchesca, osserva che « un mappamondo di tale specie, in cui sia preso « per meridiano medio quello di Parigi o quello di Monaco corrispondente « al meridiano di Behring, offrirebbe nelle condizioni meno sfavorevoli, « l'aspetto sinottico dell'integralità delle terre emerse (4). »

La proiezione cordiforme equivalente fu fatta rivivere, non è molto, dallo STEINHAUSER (5), il quale, osservando che il maggior difetto di cotale rappresentazione per la composizione del mappamondo in un solo pezzo sta nell'emisfero australe e seguendo in parte il metodo del FINEO adottato dal MERCATORE e da altri, adopera per l'emisfero boreale le regole dello STAB e del WERNER, e per l'emisfero australe le modifica in guisa da evitare le enormi alterazioni che si manifestano nelle alte latitudini me-

(1) La prima edizione è del 1570 in Anversa. Abbiamo potuto esaminare soltanto edizioni posteriori.

(2) *Gerardi Mercatoris atlas sive cosmographicae meditationes de fabrica mundi et fabricati figura denuo auctus. Editio quinta. Sumptibus et typis aeneis Henrici Odii. Amsterodami 1623.*

(3) *Geografia di M. Livio Sanuto*. Venezia 1588, fol. 20.

(4) Delle proiezioni cordiformi s'è pure discorso distesamente nelle *Proiezioni delle carte geografiche*, Cap. VI, §§ 4 e 5, Cap. VIII, §§ 31, 32 e 33, dove trovansi le mappe costruite nei tre esposti sistemi.

(5) *Stabius redivivus, eine Reliquie aus dem XVI Jahrhundert. Von Ant. Steinhäuser in Zeitschrift für wissenschaftliche Geographie*, Wien, 1885, vol. V, p. 289. Vedi anche: *Grundsätze der mathematischen Geographie und der Landkarten-Projection von ANTON STEINHAUSER*. Vienna 1887, pag. 112.

ridionali. A tale fine, delineata col solito metodo la rete dei meridiani e paralleli per l'emisfero boreale, l'autore prolunga, con arbitraria ed opportuna curva, i meridiani di $\pm 45^\circ$ e $\pm 135^\circ$ di longitudine sino ad incontrare il 180° circolo latitudinale nei punti che distano di $\pm 15^\circ$ e $\pm 55^\circ$ dall'estremità australe del semimeridiano iniziale steso in linea retta, descrive i circoli paralleli meridionali colla regola ordinaria, a destra e sinistra dei prolungamenti dei nominati quattro meridiani porta i gradi obbiettivi dei paralleli per 45° di longitudine e, congiungendo gli omonimi punti di divisione, ottiene i meridiani. Con che l'emisfero australe è descritto in quattro pezzi attaccati all'equatore secondo gli archi che vanno da 0° a $\pm 90^\circ$ e da $\pm 90^\circ$ a $\pm 180^\circ$ e terminanti nei quattro sopraddetti punti del 180° circolo latitudinale, i quali rappresentano il polo antartico (1). In ciascun pezzo dell'emisfero australe la proiezione conservasi equiva-
lente. Vi si applicano le formole del § 8 e si ha:

$$\rho = au, \quad v = t \frac{\operatorname{sen} u}{u} + \varphi(u)$$

$$\tan \delta = u \frac{dv}{du}, \quad m' = \frac{1}{\cos \delta}, \quad m'' = 1.$$

La $\varphi(u)$ è invariata pei due pezzi attaccati agli archi equatoriali che vanno da 0° a $\pm 90^\circ$. Lo stesso dicasi per gli altri due pezzi che sull'equatore abbracciano gli archi da $\pm 90^\circ$ a $\pm 180^\circ$.

Il WERNER, trattando delle tre nominate proiezioni cordiformi, non accenna alla loro proprietà di avere le aree in rapporto costante colle aree obbiettive, rapporto che riducesi all'unità per la proiezione seconda. Pare che non ne abbia avuto sentore. Ma di ciò non è da fare meraviglia. Quanti sono gli inventori di proiezioni che non ne hanno sospettate certe loro proprietà! Ciò accadde non solo a cartografi di poca rinomanza, ma anche ai sommi. Quanti secoli non iscorsero dall'invenzione della proiezione stereografica alla scoperta della sua proprietà di conservare gli angoli obbiettivi? IPPARCO che la inventò (2), TOLOMEO che ne fu il gran divulgatore (3), SINESIO che ne dettò un celebrato discorso (4), gli astronomi e geografi arabi che cotanto la discussero ed usarono (5), GIORDANO NEMO-

(1) Lo STEINHAUSER, loc. cit., ha una tavola col mappamondo descritto con tali regole.

(2) Di IPPARCO, creatore dell'astronomia matematica e vissuto tra l'anno 160 e 125 av. Cr., quale inventore della proiezione stereografica, ho discorso nelle *Proiezioni*, ecc., p. 115 e 116.

(3) Sul libro di TOLOMEO, detto *Planisfero* e che tratta della prospettiva stereografica, vedi *Le Proiezioni*, ecc., p. 114.

(4) SINESIO, nativo di Cirene in Tripolitania, vescovo di Tolemaide, matematico e filosofo, scrisse della proiezione stereografica nel *Sermo de dono astrolabii ad Peonium* inserito in *Synesii Episcopi Cyrenes opera quae extant omnia, nunc primum graece et latine condita*. Lutetiae 1612.

(5) Agli Arabi è dovuta la gloria di avere conservato e tramandato ai posteri il *Planisfero* di TOLOMEO e sostituita, nella costruzione dei planisferi, la stereografia orizzontale alla polare. Vedi, sopra ciò, il precedente § 5.

RARIO che ne dimostrò la generale proprietà della conservazione dei circoli (1), lo STOEFLER che ne scrisse un trattato sì buono da essere ricordato da tutti quelli che in seguito svolsero lo stesso argomento (2), il MAUROLICO che ne scoprì nuovi teoremi (3), altri che per amore di brevità tralasciamo, nulla dicono di sì importante proprietà. Che anzi il DELAMBRE (4), ed il CHASLES (5) credevano che per la prima volta fosse stata enunciata dal SAVERIEN (6) e dimostrata dal ROBERSTON (7). E solo più tardi si venne a sapere che primo a scoprirla fu il MERCATORE (8).

(continua).

(1) Intorno alla generale proprietà della prospettiva stereografica per la quale i circoli si proiettano secondo circoli ed a GIORDANO NEMORARIO. Vedi *Le Profezioni*, ecc., p. 117, 118 e 119.

(2) *Elucidatio fabricae ususque astrolabii a Joanne Stoefflerio in lucem edita*. Oppenheim, 1513.

(3) Del MAUROLICO abbiamo discorso nelle *Profezioni*, ecc., p. 121 e 122.

(4) *Astronomie théorique et pratique*. Parigi 1814, T. III.

(5) *Histoire de la géométrie*. Bruxelles, 1837.

(6) *Dictionnaire universel de mathématique et de physique*. Parigi, 1753, p. 329.

(7) Vedine gli Elementi di navigazione, editi nel 1751.

(8) A GERARDO MERCATORE (GERHARD KREMER, n. 1512, m. 1591) debbono attribuirsi le parole che leggonsi nel suo Atlante, dov'è un mappamondo stereografico in proiezione meridiana: *Etsi gradus a centro versus circumferentiam crescant, uti in gradibus aequinoctialibus vides, tamen latitudinis longitudinisque gradibus in eadem a centro distantibus eandem ad invicem proportionem servant quam in sphaera, et quadranguli inter duos proximos parallelos duosque meridianos rectangulam figuram habent quomodum in sphaera, ita ut regiones undique omnes nativam figuram obtineant sine omni tortuosa distractione*. Con che è significato, a chiare note, che la proiezione stereografica ha la proprietà di essere, nelle piccole parti, simile alla figura rappresentata, e, perciò, di conservare le configurazioni delle varie regioni. Dalla quale proprietà discende l'altra della conservazione degli angoli. Negli Atlanti Mercatoriani da noi esaminati non abbiamo trovate le riferite parole che desinemmo dal BREUSING: *Leitfaden durch das Wiegenalter der Kartographie bis zum 1600*. Frankfurt A. M. 1883, p. 25. Soggiungiamo subito che questi, nell'altro opuscolo: *Gerhard Kremer gen. Mercator*, 2^a ed., Duisburgo. 1878, p. 47, dice come il riferito pizzo del MERCATORE si trovi solo nelle prime due edizioni dell'Atlante comparse a Duisburgo. Le posteriori, pubblicate ad Amsterdam a cominciare dal 1606 dopo la morte del figlio RUMOLDO ed in seguito alla cessione della proprietà dell'Atlante e dei rami fatta dagli eredi a JUDICO ONDIO, non lo contengono.