

ISABELLA VARRASO

SULLE APPLICAZIONI GEOGRAFICHE DELLE CATENE DI MARKOV FINITE

Da sempre, si può dire, i geografi hanno utilizzato la matematica e la statistica, ma oggi è crescente il ricorso a un'integrazione con queste discipline. La domanda insistente di capacità organizzative e previsionali per una razionale pianificazione territoriale sollecita infatti studi geografici che richiedono, fra l'altro, l'uso di tecniche quantitative (1). Purtroppo una conoscenza non completa di tali tecniche può determinare così una scarsa come un'eccessiva considerazione delle loro possibilità di impiego, per cui già da alcuni anni e in diversi paesi, dal mondo anglosassone all'Europa dell'Est, si sono istituiti corsi universitari di matematica e statistica per geografi (2), che hanno contribuito ad accrescere l'interesse e promuovere

(1) Sull'utilizzazione di tecniche matematiche e statistiche nell'ambito della ricerca geografica cfr., ad esempio: S. GREGORY, *Statistical Methods and the Geographer*, Londra, Longmans, II ediz., 1968; J. P. COLE e C. A. M. KING, *Quantitative Geography. Techniques and Theories in Geography*, Londra, Wiley and Sons, 1968; L. KING, *Statistical Analysis in Geography*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1969; J. B. RACINE e H. REYMOND, *L'analyse quantitative en géographie*, Parigi, P.U.F., 1973; R. HAMMOND e P. MAC CULLAGH, *Quantitative Techniques in Geography: An Introduction*, Oxford, Clarendon Press, 1974; GROUPE CHADULE, *Initiation aux méthodes statistiques en géographie*, Parigi, Masson, 1974; A. G. WILSON e M. J. KIRKBY, *Mathematics for Geographers and Planners*, Oxford, Clarendon Press, 1975; G. N. SUMNER, *Mathematics for Physical Geographers*, Londra, Arnold, 1978; J. SILK, *Statistical Concepts in Geography*, Londra, Allen and Unwin, 1979.

(2) Cfr. B. P. FITZGERALD, *Developments in Geographical Methods*, Londra, Oxford Univ. Press, 1974, p. 5 (Coll. « Science in Geography », 1); inoltre, V. B. SOCHAVA, *The Training of Geographers for Work in Applied Geography*, in « Soviet Geogr.: Review and Transl. », New York, 1970, pp. 730-736, in part. p. 731, e Y. G. SAUSHKIN, *Results and Prospects of the Use of Mathematical Methods in Economic Geography*, ibid., 1971, pp. 416-427, il quale osserva come sia necessario « allargare la cerchia di geografi che usano metodi matematici » (p. 427). Del resto, in seguito a un'indagine svolta presso università americane allo scopo di

la pratica di questi strumenti, con l'ulteriore conseguenza di un più frequente ricorso, in geografia, anche ai processi deterministici e stocastici per l'analisi di fenomeni (3).

Un processo stocastico che ha avuto diverse applicazioni nella nostra disciplina, e potrebbe presentare numerosi motivi d'interesse nello studio di problemi geografici, è costituito dalle catene di Markov. Questo modello, proprio per sua definizione, si presta all'esame di processi che « possono essere rappresentati come un insieme di flussi di oggetti o persone fra categorie di un certo tipo » (4). Si supponga, infatti, di considerare spostamenti di merci, uomini, denaro o altro fra « stati » del sistema (aree, regioni, classi ecc.). Se « lo sviluppo probabilistico futuro dipende solo dallo stato presente ma non dalla storia passata del processo o dal modo in cui è stato raggiunto lo stato presente » (5), allora si verifica la « proprietà di Markov » ed il processo stocastico è una catena di Markov. La probabilità che oggetti o individui hanno di spostarsi da uno stato all'altro del sistema prende il nome di « probabilità di transizione » e la matrice avente per elementi queste probabilità è detta « matrice di probabilità di transizione », ed è stocastica (6).

fornire indicazioni per una ricerca geografica migliore, un'apposita commissione raccomandava, fra l'altro, di « intraprendere speciali programmi per rinforzare la preparazione matematica dei geografi » (cfr. E. J. TAAFFE (a cura di), *Geography*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1970, pp. 131-136, in part. pp. 135-136).

(3) Sui concetti di processo deterministico e stocastico, l'esame di alcuni modelli e le loro applicazioni in geografia, cfr., ad esempio: D. HARVEY, *Models of the Evolution of Spatial Patterns in Human Geography*, nel vol. R. J. CHORLEY e P. HAGGETT (a cura di), *Models in Geography*, Londra, Methuen, 1967, pp. 549-608, in part. pp. 561-588; e ancora D. HARVEY, *Explanation in Geography*, Londra, Arnold, 1969, pp. 263-270 e 426-428. Per obiettività va ricordato come l'Harvey, che aveva inizialmente utilizzato metodologie implicanti un approccio « scienziista » e quantitativo ai fenomeni geografici, abbia poi privilegiato il metodo dell'analisi dialettica (cfr. D. HARVEY, *Social Justice and the City*, Londra, Arnold, 1972, trad. itai. *Giustizia sociale e città*, Milano, Feltrinelli, 1978, e la recensione di G. DEMATTEIS, in « Riv. Geogr. Ital. », Firenze, 1975, pp. 276-277).

(4) D. J. BARTHOLOMEW, *Stochastic Models for Social Processes*, Londra, Wiley and Sons, II ediz., 1973, p. 15.

(5) W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. I, New York, Wiley and Sons, III ediz., 1969, p. 444.

(6) E' forse opportuno, a questo punto, esplicitare che, considerato un processo stocastico finito — cioè con spazio degli stati S finito (per comodità si pone $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$) — e quindi una famiglia $i_0, i_1, \dots, i_n$ di stati e una successione finita di variabili aleatorie $X_0, X_1, \dots, X_n$ del processo, la proprietà di Markov si esprime formalmente nel seguente modo:

$\Pr [X_n = i_n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}] = \Pr [X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}]$

Le probabilità di transizione al passo k -simo del processo di Markov, denotate con $p_{ij}(k)$, sono quindi

$$p_{ij}(k) = \Pr [X_k = j | X_{k-1} = i] \quad \forall i, j \in S \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e indicano le probabilità di spostarsi nel tempo t_k dallo stato i allo stato j del sistema. Questa proprietà probabilistica è un'ipotesi di lavoro che difficilmente trova

Il modo in cui una catena di Markov si evolve risulta quindi completamente descritto, in senso probabilistico, dalla sua matrice di transizione e dal vettore che rappresenta la situazione iniziale del sistema. Le possibilità applicative del modello sono offerte, inoltre, dalle sue proprietà; fra queste, importante per la previsione dei fenomeni che si intendono studiare è il comportamento asintotico della matrice di transizione. Le successive potenze di tale matrice, purché fra di esse ve ne sia una con elementi tutti diversi da zero, tendono infatti ad un'ulteriore matrice in cui ciascuna riga è costituita dallo stesso vettore di probabilità. Il sistema quindi si evolve verso uno stato di equilibrio e la velocità di convergenza può dare indicazioni sull'intensità dei flussi da uno stato all'altro. Le catene di Markov sono state perciò usate, oltre che per scopi previsionali, anche per derivare indici sulla dinamica dei fenomeni in esame.

In geografia, catene di Markov finite, omogenee, del primo ordine (7) sono state applicate, fra l'altro, a problemi di mobilità delle industrie e di variazioni dimensionali delle stesse. E' stata infatti studiata, a scala regionale, la dinamica strutturale di industrie che sorgono, si sviluppano o cessano la loro attività, e sono così emersi suggerimenti circa lo sviluppo

riscontro nella realtà. Del resto le catene di Markov, come tutti i modelli, consentono una rappresentazione necessariamente approssimata e generale dei fenomeni e ciò costituisce un limite, che giustifica la cautela nell'adottarli, ma anche un vantaggio, per le ampie possibilità di analisi che permettono. In particolare il ricorso in geografia al modello markoviano è stato incoraggiato dalle applicazioni effettuate e dai risultati positivi conseguiti in altre discipline, quali ad esempio sociologia, demografia, economia e geologia (cfr. L. COLLINS, R. DREWETT e R. FERGUSON, *Markov Models in Geography*, in «The Statistician», Edimburgo, 1974, pp. 179-209, in part. pp. 179-180).

Se le probabilità di transizione non dipendono da k , basta denotarle allora con p_{ij} e la catena di Markov si dice omogenea.

Il processo si può inoltre esprimere in forma matriciale. Ad esempio, nel caso di uno spazio degli stati costituito da due elementi, la matrice che lo descrive è la seguente:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

ed è per costruzione stocastica (ovvero con somma delle righe uguale a uno), quadrata, di ordine uguale al numero degli stati, non negativa.

Per la trattazione matematica delle catene di Markov finite si vedano, fra gli altri: J. C. KEMENY e J. L. SNELL, *Finite Markov Chains*, New York, Springer-Verlag, 1976; U. N. BHAT, *Elements of Applied Stochastic Processes*, New York, Wiley and Sons, 1972; S. KARLIN e H. M. TAYLOR, *A First Course in Stochastic Processes*, New York, Academic Press, II ediz., 1975, in part. pp. 45-166. Un'impostazione geografica è proposta da L. COLLINS, *An Introduction to Markov Chain Analysis*, Norwich, Geo Abstracts Ltd.-University of East Anglia, 1975 (Coll. «Concepts and Techniques in Modern Geography», 1), che ne esamina proprietà, significato e conseguenze delle ipotesi, oltre ad alcune applicazioni a problemi geografici.

(7) Si è già data la definizione di catena di Markov finita e omogenea. La proprietà di Markov del primo ordine, inoltre, è verificata quando la probabilità del sistema di spostarsi da uno stato all'altro ad un generico istante t_n è condizionata esclusivamente dalla posizione del sistema al tempo immediatamente precedente t_{n-1} .

nel tempo del fenomeno (8). A scala intraurbana, inoltre, il processo è stato applicato ad un caso di « migrazione » industriale, per conoscere la distribuzione futura delle aziende — distinte in nuove, *movers* (unità la cui ubicazione è cambiata) e *stayers* (unità la cui ubicazione non è cambiata) — all'interno della città e nel suo hinterland; le previsioni a breve scadenza in tal modo ottenute hanno consentito di individuare il periodo di tempo e l'area in cui dovrebbero verificarsi gli spostamenti più sensibili delle aziende, fornendo significative informazioni per i pianificatori dei trasporti e gli operatori economici locali (9).

Nell'ambito della geografia urbana, l'applicazione del modello markoviano si è rivolta, fra l'altro, all'analisi delle variazioni del livello medio degli affitti di appartamenti in alcune città. Il centro urbano è stato suddiviso in zone e l'esame degli spostamenti, nel tempo, da una fascia d'affitto ad un'altra ha consentito di riconoscere l'aumento o la diminuzione della domanda di appartamenti in regime di locazione, e quindi di fornire anche una misura dei mutamenti temporali che si possono rilevare nella struttura urbana (10).

Le catene di Markov sono state finalizzate, inoltre, all'esame dei flussi di capitali fra regioni ed hanno manifestato un particolare vantaggio nel « conciliare due aspetti apparentemente contraddittori nel processo di crescita regionale: le tendenze cumulative nella concentrazione e agglomerazione da una parte e il concetto di equilibrio dall'altra » (11); esse rendono possibile, infatti, osservare i movimenti finanziari interregionali, per individuare quello che dovrebbe essere lo stato di equilibrio. Nel caso poi di rela-

(8) Cfr. L. COLLINS, *Industrial Size Distributions and Stochastic Processes*, in « Progress in Geography », Londra, 1973, pp. 119-165, che ha studiato la dinamica strutturale dell'attività manifatturiera nella provincia dell'Ontario, basandosi sul numero di addetti. Egli ha osservato come gli approcci tradizionali — quali, ad esempio, la distribuzione di frequenze, la curva di Lorenz e i coefficienti di Gini — nel caso in cui si voglia analizzare la diversa distribuzione dimensionale delle industrie, pur dimostrandosi utili per l'esame descrittivo del passato e per effettuare confronti, non dicano nulla sulla dinamica interna del fenomeno e quindi sul suo aspetto futuro, mentre un contributo in questo senso è offerto dalle catene di Markov.

(9) Cfr. l'applicazione effettuata da W. F. LEVER, *The Intra-Urban Movement of Manufacturing: A Markov Approach*, in « Trans. Inst. Brit. Geogr. », 56, Londra, 1972, pp. 21-38, in cui sono presi in esame i dati relativi alla distribuzione delle industrie intorno alla città di Glasgow negli anni 1959, 1964 e 1969.

(10) Cfr. W. A. V. CLARK, *Markov Chain Analysis in Geography: An Application to the Movement of Rental Housing Areas*, in « Ann. Ass. of Amer. Geogr. », Washington, 1965, pp. 351-359, in cui sono esaminate le variazioni delle medie degli affitti nelle aree centrali di Detroit, Pittsburgh, Indianapolis e St. Louis in periodi intercensuali (1940-1950-1960). Clark osserva fra l'altro come applicazioni simili possano essere effettuate per studiare lo sviluppo o il declino di singoli centri in un dato intervallo di tempo.

(11) H. W. RICHARDSON, *A Markov Chain Model of Interregional Savings and Capital Growth*, in « Journ. Reg. Sciences », Filadelfia, 1973, pp. 17-27, in part. p. 19.

zioni risparmio-investimenti, poiché i capitali investiti cessano ovviamente di circolare, è più opportuno impiegare catene di Markov assorbenti (12), che, per la loro stessa struttura, presentano analogie col processo in esame e sono quindi più idonee a trattarlo (13).

Il crescente interesse dei geografi ai problemi del comportamento umano ha ulteriormente messo in rilievo l'esigenza di studi probabilistici. In particolare, le catene di Markov si sono rivelate utili nell'analisi di scelte spaziali (luoghi di acquisti, percorsi, aree di residenza o di produzione). I *decision-makers* infatti — assimilati a punti di un'area suddivisa in un certo numero di luoghi, l'accesso ai quali sia possibile con uguale probabilità —, dopo aver attraversato gli stadi di « riconoscimento » e di « scelta », raggiungono l'equilibrio, cioè prendono sempre la stessa decisione riguardo alle possibili alternative loro proposte (14).

Ancora nell'esame di processi decisionali, si sono avute applicazioni per studiare il comportamento di flussi di viaggiatori in una rete viaria. Ogni raccordo stradale è stato considerato come un punto in cui il viaggiatore effettua una scelta in relazione alle sue particolari esigenze ed esperienze precedenti, e scopo della ricerca è di individuare gli squilibri nell'utenza della rete, per attenuarli modificando opportunamente i percorsi più trascurati (15).

In geografia della popolazione, le catene di Markov si sono rivelate efficaci nell'esame dei fenomeni migratori, in quanto hanno fornito indicazioni utili per distribuire in modo più equilibrato il carico demografico nelle diverse regioni (16); in questo caso, sono state usate le proprietà del mo-

(12) Una catena di Markov si dice assorbente quando tutti gli stati ricorrenti sono assorbenti, cioè è certo il ritorno allo stato di partenza e non vi è quindi alcuna probabilità di passare da uno stato all'altro del sistema.

(13) Cfr. H. W. RICHARDSON, op. cit., che ha appunto considerato l'utilità delle catene di Markov nello studio di flussi di capitali.

(14) Cfr. P. BURNETT, *A Three-State Markov Model of Choice Behavior within Spatial Structures*, in « Geogr. Analysis », Columbus, 1974, pp. 53-68.

(15) Cfr. C. D. MORLEY e J. B. THORNES, *A Markov Decision Model for Network Flows*, in « Geogr. Analysis », Columbus, 1972, pp. 180-193, in cui come esempio di rete stradale è considerata la sezione del Parco Nazionale di Dartmoor.

(16) Il modello di Markov si è dimostrato idoneo a studiare problemi di migrazione di popolazione, malgrado la sua discutibilità quale strumento previsionale a causa soprattutto dell'ipotesi di stazionarietà (cfr. D. M. BONNAR, *Stochastic Models for Migration Analysis*, Londra, Department of Geography Univ. of Reading, 1976 (Coll. « Geographical Papers », 51), pp. 17-22), come testimoniano le numerose applicazioni in questo campo: cfr. A. ROGERS, *A Markovian Policy Model of Interregional Migration*, in « Papers Reg. Science Ass. », Filadelfia, 1966, pp. 205-224, che suggerisce di servirsi delle catene di Markov nel calcolo del flusso migratorio per conoscere quale dovrebbe essere la distribuzione equilibrata di popolazione tra subaree di una regione; P. A. COMPTON, *Internal Migration and Population Change in Hungary between 1959 and 1965*, in « Trans. Inst. Brit. Geogr. », 47, Londra, 1969, pp. 111-130, che tratta i vettori d'equilibrio come indici di valutazione degli effetti migratori; M. S. SALKIN, T. P. LIANOS e Q. PARIS, *Population Predictions for the Western United States: a Markov Chain Approach*, in « Journ. Reg. Science »,

dello per scopi descrittivi, derivando indici di mobilità e definendo particolari distanze funzionali (17).

Questo processo stocastico, indipendentemente dagli esiti più o meno buoni osservati nei singoli casi, può rappresentare un punto di partenza per sviluppare modelli più sofisticati e aderenti alla realtà. Inoltre, l'interesse che le catene di Markov hanno suscitato nei geografi è giustificato dalla loro semplicità operativa, dalla facilità di verifica delle ipotesi di base e dalla possibilità di acquisire informazioni difficilmente ottenibili con altri mezzi (18). L'approccio markoviano dunque, se non esaurisce l'analisi dei fenomeni, può costituire uno strumento utile soprattutto « nello studio di problemi di evoluzione umana, giacché consente di trattare la dipendenza temporale di eventi in un sistema di ubicazioni geografiche, e di esaminare l'equilibrio come uno stato statistico in termini di processi effettivamente operanti nella società » (19).

I limiti d'impiego e di efficacia del processo dipendono essenzialmente dalle ipotesi di omogeneità e stazionarietà delle probabilità di transizione e dalla proprietà di Markov « del primo ordine » che il modello deve soddisfare (20). In particolare l'ipotesi di stazionarietà, per la quale i parametri devono rimanere costanti in tutto il periodo di osservazione del fenomeno, si rivela poco realistica. Si suppone, infatti, che nel tempo in cui si effettua lo studio non si manifestino mutamenti così significativi da alterare lo stato del sistema: ciò, se può ritenersi verosimile nel caso di previsioni a breve termine, non si verifica sempre per analisi a lunga scadenza. È stato quindi suggerito di ricorrere alle catene di Markov per scopi descrittivi più

Filadelfia, 1975, pp. 53-60. In Italia, applicazioni di catene di Markov all'esame dei movimenti di popolazione fra le varie regioni sono state effettuate da demografi, tra cui: C. BENEDETTI, *Le migrazioni interne stagionali secondo una catena di Markov*, in « Rass. Stat. Lavoro », Roma, 1961, pp. 225-228; O. VITALI, *Problemi metodologici e logici di un'applicazione delle catene di Markov alle previsioni dei movimenti migratori*, in M. LIVI BACCI (a cura di), *Le migrazioni interne in Italia*, « Atti del seminario di demografia tenuto nell'a. a. 1965-66 », Firenze, Scuola di Statistica dell'Università, 1967, pp. 133-213.

(17) Cfr., ad esempio, A. ROGERS, *Matrix Analysis of Interregional Population Growth and Distribution*, Berkeley, Univ. of California, 1968, che deriva indici di mobilità per la popolazione, sia bianca che negra, servendosi dei vettori d'equilibrio, e considera la matrice dei tempi medi di primo passaggio come una misura della « distanza migratoria » tra le aree in esame; inoltre L. A. BROWN e D. B. LONG-BRAKE, *Migration Flows in Intra-Urban Space: Place Utility Considerations*, in « Ann. Ass. of Amer. Geogr. », Washington, 1970, pp. 368-384, considerano il primo ritorno in una delle aree già attraversate come un indice delle diverse aspirazioni o probabilità di migrazione degl'individui.

(18) Cfr. L. COLLINS, R. DREWETT e R. FERGUSON, op. cit., p. 181.

(19) D. HARVEY, *Models of the Evolution of Spatial Patterns in Human Geography*, cit., p. 582.

(20) Sulla restrittività, a fini applicativi, delle ipotesi di base delle catene di Markov finite, omogenee, del primo ordine, si è soffermato L. COLLINS, *An Introduction to Markov Chain Analysis*, cit., pp. 24-26.

che previsionali e di rendere meno critica l'ipotesi di stazionarietà usando il modello per generare indici comparativi. Particolare attenzione è stata rivolta perciò all'impiego del processo markoviano nella determinazione di distanze funzionali, di regioni funzionali o nodali e di gerarchie, nella classificazione di fenomeni in base alle caratteristiche dei flussi e nell'esame di processi decisionali (21).

Partendo proprio dai limiti del modello di Markov e in particolare dall'ipotesi di stazionarietà, e richiamandone una definizione del Gale (22), P. A. Rogerson ha recentemente suggerito una modifica del processo (23). Egli infatti, come il Gale, individua una stazionarietà funzionale ed una differenziale, oltre a quella consueta, che definisce locale (24). Le stazionarietà funzionale e differenziale non assicurano, però, che la matrice di transizione si conservi stocastica; tuttavia, se le probabilità di transizione sono funzioni lineari del tempo, con parametri costanti nel tempo, lo stesso Rogerson suggerisce come ovviare a questo problema costruendo opportunamente la matrice di transizione su cui lavorare (25). La validità del modello così modificato è stata verificata ripetendo le applicazioni effettuate da Salkin, Lianos e Paris (26) per la previsione della distribuzione della popolazione in undici Stati degli U.S.A. al 1980, e da Collins (27) per

(21) Cfr. L. A. BROWN, *On the Use of Markov Chains in Movement Research*, in «Econ. Geogr.», Worcester, 1970, pp. 393-403, che considera le catene di Markov come strumento sia descrittivo che previsionale.

(22) S. GALE, *Stochastic Stationarity and the Analysis of Geographic Mobility*, in P. ADAMS e F. HELLEINER (a cura di), *Papers Presented to the 22nd International Geographical Congress, Montreal*, Toronto, Univ. of Toronto, 1972.

(23) P. A. ROGERSON, *Prevision: a Modified Markov Chain Approach*, in «Journ. Reg. Science», Filadelfia, 1979, pp. 469-478.

(24) Per definizione, nella stazionarietà funzionale le probabilità di transizione sono funzioni di una o più variabili i cui parametri restano costanti nel tempo, mentre nella stazionarietà differenziale le probabilità di transizione in due successivi periodi di tempo differiscono di una costante.

(25) Considerato un set di matrici di probabilità di transizione i cui elementi sono funzioni lineari del tempo, Rogerson dimostra che è stocastica la matrice ottenuta stimando i parametri delle corrispondenti probabilità di transizione delle matrici in esame con un ordinario procedimento ai minimi quadrati.

(26) Cfr. M. S. SALKIN, T. P. LIANOS e Q. PARIS, op. cit., i quali, per ottenere la previsione della distribuzione della popolazione al 1970, moltiplicarono la terza potenza della matrice di transizione relativa al 1960 per il vettore di stato della popolazione del 1960. I risultati, confrontati con i valori reali, si mostrarono soddisfacenti e fornirono una misura dell'accuratezza della previsione. Ne venne effettuata una ulteriore per il 1980, ed i risultati furono poi modificati tenendo conto dell'incremento naturale non compreso nel modello.

(27) L. COLLINS, *Industrial Migration in Ontario: Forecasting Aspects of Industrial Activity through Markov Chain Analysis*, Ottawa, Statistics Canada, 1972. Come Rogerson stesso ricorda, Collins nel suo studio utilizza la matrice media degli anni 1961-1965, presi in esame, e la moltiplica per il vettore di stato relativo al 1961, al fine di ottenere indicazioni circa l'eventuale distribuzione delle industrie nei successivi quattro anni.

un'indagine sulla « migrazione » industriale dell'Ontario, e confrontando poi i risultati ottenuti.

Nel primo caso, Rogerson stima le matrici di transizione relative agli anni 1960-1965 e 1965-1970 « eseguendo regressioni separate su ciascuna coppia di stati » (28), e le moltiplica per il vettore, che rappresenta lo stato della popolazione al 1960, per poterne prevedere la distribuzione nel 1970. Successivamente confronta fra loro i valori così ottenuti, quelli conseguiti da Salkin, Lianos e Paris e i dati reali, mostrando come i primi siano più vicini alla realtà in otto degli undici Stati (anche se per il Wyoming la previsione effettuata col modello modificato si discosta molto dai valori effettivamente osservati). Va rilevato peraltro che i migliori risultati conseguiti sono forse dovuti non solo alla tecnica usata ma anche alla scelta dei dati di partenza. Rogerson, infatti, per effettuare la previsione della distribuzione del carico demografico al 1970 non utilizza gli stessi valori di partenza presi in esame da Salkin, Lianos e Paris, ma quelli che si riferiscono ad anni più vicini al 1970 (1960-1965 e 1965-1970); inoltre, la matrice stimata su cui lavora è costruita considerando anche i dati relativi all'anno di cui vuole effettuare la previsione. Egli ha pure ricavato le previsioni per il 1980, benché non siano indicati chiaramente i dati utilizzati: in quest'ultimo caso, tuttavia, non appare convincente la valutazione positiva che Rogerson esprime sui risultati da lui ottenuti col modello modificato, rispetto a quelli raggiunti da Salkin, Lianos e Paris (29): infatti, egli effettua il raffronto prendendo come elemento di paragone non dati concreti ma un'ulteriore previsione, e precisamente quella elaborata dal *Bureau of the Census* statunitense.

Nel secondo caso, in cui viene ripresa l'applicazione di Collins, è possibile il confronto fra i vettori di stato per ogni anno dal 1962 al 1965: ne risulta evidenziata — questa volta rispetto ai dati reali — la migliore previsione raggiunta da Rogerson, il quale sottolinea che « la [propria] tecnica utilizza non solo informazioni per tutti e quattro gli anni, ma tiene presenti anche le tendenze temporanee » (30), ossia rispecchia più efficacemente l'andamento lineare del fenomeno. Ulteriore conferma dei buoni risultati così raggiunti è infine fornita dal *test* χ^2 delle distribuzioni previste e osservate effettuate sempre per ogni anno (31).

La modifica proposta può risultare effettivamente vantaggiosa nel caso di processi che si evolvono in modo monotono nel tempo, ed è questo un

(28) Cfr. P. A. ROGERSON, op. cit., p. 474.

(29) Cfr. P. A. ROGERSON, op. cit., p. 475, tab. 2.

(30) Cfr. P. A. ROGERSON, op. cit., p. 477.

(31) Come noto, il *test* χ^2 misura di quanto si discostano le frequenze effettivamente osservate con cui si manifesta il fenomeno da quelle attese (cioè da quelle che vi sarebbero se il fenomeno si presentasse uniformemente distribuito), e perciò è usato per confrontare i valori ottenuti con una particolare tecnica, in questo caso i risultati delle previsioni, con quelli reali.

limite che lo stesso Rogerson rileva. Egli sottolinea, inoltre, come gli elementi della matrice stimata non si mantengano compresi tra zero e uno quando la si proietta nel futuro; il problema, tuttavia, non si pone sempre per previsioni a breve termine, e comunque Rogerson suggerisce, per superarlo, di distribuire proporzionalmente i valori minori di zero o maggiori di uno presenti in una riga della matrice fra tutti gli elementi della stessa riga.

Se ulteriori applicazioni ne verificheranno l'efficacia, il modello modificato proposto da Rogerson potrà rappresentare un utile tentativo di superare uno fra i maggiori limiti che le catene di Markov hanno finora denunziato nelle indagini geografiche, e renderle quindi più adatte all'esame di fenomeni dinamici soggetti all'azione di fattori temporalmente variabili.

ON THE GEOGRAPHICAL APPLICATIONS OF FINITE MARKOV CHAINS. — The increasing interest of geographers in quantitative techniques explains the present recourse to stochastic processes. Finite Markov chains proved particularly useful as to the geographic research into phenomena that develop in time and space. The Authoress examines some applications to geography, the limitations of this process and a model modified by P. A. Rogerson.